XI - Notre « monde-*Musique* » et le « *Topos of Music* » (G. Mazzola)

Mettons notre Idée musicienne d'un monde-*Musique* à l'épreuve d'une conception mathématicienne de la musique qui nous est contemporaine et qui s'apparente à la nôtre puisqu'elle dispose en son cœur la notion de *topos* : celle que déploie Guerino Mazzola dans son vaste livre *The Topos of Music 1*, un des quatre gros ouvrages qui contrepointent le nôtre[A].

Nos deux approches se présentent comme voisines : elles sont synchrones, se connaissent bien[B], et s'alimentent toutes deux à la problématique grothendickienne des topos. Tout ceci configure une contemporanéité de problématiques, propice aux *rai*sonances musique-mathématiques et apte à mieux caractériser ce que notre Idée de monde-*Musique* a de spécifiquement musical.

1 – Une proximité disjonctive

Idée musicienne de monde-*Musique* et notion mathématicienne de *topos of music*[C] sont formellement proches.

Qu'est-ce en effet qu'un *topos of music* ? C'est la catégorie[D] dont les objets sont les « compositions globales » et dont les relations sont les « morphismes *mathématiques* ». [2]

A. Nous avons déjà examiné *Logiques des mondes* d'Alain Badiou (II. VII) ; nous examinerons ensuite le *Traité des objets musicaux* de Pierre Schaeffer (II. XIII) et, pour finir, *Cinquante ans de modernité musicale* de Célestin Deliège (IV. V).

B. Leurs auteurs confrontent directement leurs points de vue depuis une dizaine d'années : très exactement depuis le forum Diderot organisé à l'Ircam fin 1999 par la Société Mathématique Européenne qui nous a conduits à mettre en place un séminaire commun *mamuphi* (mathématiques-musique-philosophie). Au printemps 2005, j'ai invité Guerino Mazzola à l'École normale supérieure pour qu'il nous y expose sa théorie mathématique de la musique. Ces séances font l'objet du livre *La vérité du beau dans la musique* (Éd. Ircam-Delatour, 2007), qui constitue un complément didactique de son *The Topos of Music*.

C. Gardons ici le terme anglais « *topos of music* » comme nom propre de la notion mazzolienne, tout de même que « monde-*Musique* » est le nom propre de notre Idée.

D. Au sens mathématique du terme, et non pas au sens d'une catégorie verbale (notion ou concept).

Qu'est-ce qu'une composition globale ? C'est une composition obtenue par « patchwork » [3] de compositions locales. [4] En simplifiant, une composition locale [5] formalise un bout de partition. Une composition globale formalisera donc une partition globale obtenue par assemblage de bouts de partition.

Qu'est-ce qu'un « morphisme mathématique » ? C'est une transformation formelle – mathématique plutôt que musicale – entre structures afférentes à nos compositions locales/globales. [6]

Au total :

– du côté des objets, les compositions locales/globales ressemblent à la formalisation de nos sous-morceaux/morceaux, à ce point (essentiel) près que la notion de composition (locale ou globale) formalise notre morceau de musique du seul côté de sa partition, et non pas comme relation (de type faisceau) entre cette partition et l'ensemble de ses exécutions envisageables ;

– du côté des relations, les « morphismes mathématiques » ressemblent à nos relations-morphismes (extractions et recueils), à ce point (non moins essentiel) près qu'ils désignent des propriétés formelles (propriétés simpliciales de recollement et d'assemblage…) entre objets mathématiques formalisant les morceaux et non pas des relations musicales entre morceaux – ce qui au demeurant les rend étrangers à nos relations-influences ;

– last but not least : du côté de l'ensemble structuré objets/relations, *topos of music* désigne le topos mathématique *formalisant* les activités musicales, non l'espace musical même de ces activités (quand, à l'inverse, notre monde-*Musique* désigne le monde musical même, non sa représentation formalisée : ses objets *sont* les morceaux, non leur formalisation – les partitions par exemple y interviennent comme telles et non pas transformées en objets mathématiques – et ses relations *sont* les influences musicales entre les morceaux, non entre formalisations mathématiques).

Autant dire que, de part en part, ce *topos of music* est de nature formellement mathématique plutôt que spécifiquement musical.

Il n'y aurait bien sûr pas de sens de reprocher un tel parti pris à un livre mathématique ! Notons simplement ce premier écart radical entre approche mathématicienne et approche musicienne.

En premier abord, on dira que notre monde-*Musique* désigne un monde musical fait des relations musicales entre les morceaux quand le *topos of music* désigne un topos mathématique fait de relations formelles entre des représentations mathématiques des partitions. Où la disjonction se dessine donc terme à terme :

$$\frac{\text{monde musical}}{\text{topos mathématique}}\textit{fait de relations}\frac{\text{musicales}}{\text{mathématiques}}\textit{entre}\frac{\text{les}}{\text{des formalisations}}\frac{\text{morceaux}}{\text{des partitions}}$$

2 – Une dissonance

Si le rapport mathématiques-musique se constitue ainsi très différemment dans ces deux approches, on peut s'attendre à ce qu'il en soit de même en matière de rapport à la philosophie s'il est vrai [7] que toute corrélation étroite entre musique et mathématiques mobilise, implicitement ou explicitement, une conception philosophique de ce que *penser* peut vouloir dire de commun entre ces deux domaines disjoints.

En effet, force est de constater que l'Idée musicienne de monde-*Musique* et la notion mathématicienne de *topos of music* ne prennent pas appui sur les mêmes orientations philosophiques :

– au titre des *rai*sonances musique-mathématique, notre livre, on l'a vu [8], prend appui sur une généalogie Bachelard-Cavaillès-Lautman-Badiou ;

– pour leur part, les livres de Mazzola[A], d'un côté font proliférer localement les références philosophiques centrifuges, d'un autre côté relèvent globalement d'un néo-positivisme logique très en vogue dans cette musicologie anglo-saxonne qui constitue, du côté de la musique, la base théorique de l'approche mazzolienne ; par exemple cette conception poppérienne de la musicologique :

> « La modélisation mathématique établit des théorèmes dont les énoncés précis peuvent être vérifiées/falsifiés vis-à-vis des faits de l'expérience compositionnelle. » [9]

ou cette vision scientiste du sujet[B] :

A. Nous traiterons ici simultanément et indifféremment des deux livres précédemment mentionnés de G. Mazzola, s'accordant sur ce point avec leur auteur qui présente le second (*La vérité du beau dans la musique*) comme prolongation du premier (*The Topos of Music*).

B. Indiquons ici, sans nous y étendre, que cette conception scientiste du sujet se légitime d'une interprétation du lemme de Yoneda aussi sauvage (les morphismes deviennent des points de vue « subjectifs » sur l'objet) que formellement inexacte s'il est vrai que l'éclatement de l'objet auquel le lemme de Yoneda donne forme inclut son éclatement interne en sous-objets et ne saurait donc se réduire à l'éclatement de ses « apparences » phénoménales externes. Profitons-en pour rappeler que, dans la philosophie de Badiou, la phénoménalité de l'objet ne requiert nul sujet : à preuve, un chien peut, tout autant qu'un animal humain,

> «Je ne vois pas pourquoi il ne pourrait exister une science du sujet. La sémiotique moderne [...] est tout à fait capable de constituer un discours scientifique sur le sujet.» [10]

En ce point, d'importance stratégique, la disjonction monde-*Musique*/*topos of music* s'atteste ainsi *au plus proche*.

3 – Le croisement de trois difficultés

Une fois mesure ainsi prise d'un écart au plus proche, comment lire en musicien ce livre de mathématiques?

Notre appropriation musicienne de ce livre va rencontrer trois difficultés :

1. Il y a d'abord une première difficulté traditionnelle : celle de tout musicien pensif, amateur de mathématiques, devant un livre de mathématiques qui se met à parler de musique – songeons à Rameau confronté au *Tentamen* d'Euler[A].
2. Il y a ensuite une seconde difficulté, plus circonstanciée : celle du musicien pensif devant un livre qui s'avère relever non de la mathématique *en soi* mais des mathématiques appliquées à la musique[B], ce qui s'éprouve ici dans le fait que l'entreprise théorique de Mazzola débouche immanquablement sur une implémentation informatique d'outils destinés à une musicologie computationnelle[C].
3. Il y a enfin une troisième difficulté, cette fois tout à fait spécifique à l'orientation mazzolienne : tout cet appareillage mathématique et informatique est mis au service d'une *intension* qu'on dira conjonctive, visant à

---

examiner une statue sous tous ses angles (puisque tel est l'illustration que propose Mazzola du Lemme de Yoneda) en vue de dégager le versant mieux approprié… à ses besoins naturels.

A. On y reviendra dans notre prochain volume consacré à l'intellectualité musicale.

B. Indiquons d'ores et déjà que tel n'était pas exactement le cas des écrits eulériens traitant de musique : on distingue ici théorie mathématique de la musique (Euler) et mathématiques appliquées à la musique. Une théorie mathématique de la musique telle celle d'Euler, quoiqu'elle ait pu apporter par ailleurs à la musique (en fait à la musicologie), visait en vérité les mathématiques. Les mathématiques appliquées à la musique, quoiqu'elles puissent apporter par ailleurs à la mathématique, visent essentiellement la musique (ou plus souvent la musicologie).

C. Les logiciels *Presto* (analyse et compositions musicales assistées par ordinateur) et *Rubato* (informatisation de phrasés musicaux) dans *The Topos of Music*, un logiciel «modélisant» la main d'un pianiste dans *La vérité du beau dans la musique*…

adjoindre étroitement mathématiques et musique en sorte de rétablir une conception pythagoricienne de leur intrication.

Examinons ces trois difficultés une à une.

4 – Une première difficulté, générale

La première difficulté relève d'un genre qu'on a déjà rencontré dans notre lecture de *Logiques des mondes* d'Alain Badiou : le musicien, intéressé par la mathématique pour la lumière qu'elle peut fournir à l'intellectualité musicale, se découvre encombré plutôt que stimulé lorsque cette mathématique se met à parler de musique, à tout le moins parce que ce que cette mathématique va entendre *pour elle* par musique ne correspondra guère à ce que *musique* signifie pour le musicien : n'y reconnaissant pas « sa » musique, le musicien aura d'autant plus de difficultés à faire siennes ces mathématiques.

La réciproque va de soi : un mathématicien ne saurait s'intéresser à notre livre pour la mathématique qui s'y trouve mobilisée (en vue de notre idéation musicienne), à tout le moins parce que cette mathématique éparse, disparate et un peu datée embarrassera le mathématicien soucieux de musique plutôt qu'elle ne l'encouragera à faire sien ce livre : son imaginaire mathématicien des rapports musique-mathématiques ne se retrouvera guère dans notre imaginaire musicien des rapports mathématiques-musique.

Il nous faut donc procéder à l'égard de la mathématique comme nous procédons à l'égard de la philosophie : lire un livre de mathématique en privilégiant la part de ce livre qui précisément ne parle pas de musique ; ce n'est qu'en court-circuitant ses éventuels développements sur la musique que nous pourrons nous approprier, *en musiciens*, cette mathématique.

5 – Une second difficulté, particulière

Or ce livre se présente avant tout comme un ouvrage de mathématiques appliquées à la musique, nourri d'informatique théorique en sorte de déboucher sur de véritables implémentations destinées à stimuler une musicologie computationnelle.

Cette *intension* générale est patente dans l'architecture de *The Topos of Music* : la construction de la notion centrale de « *topos of music* » culmine dans sa définition au tiers du volume, la suite (les deux derniers tiers donc) étant alors consacrée non pas comme on aurait pu s'y attendre à l'examen des conséquences intra-mathématiques de cette nouvelle notion – notion, au demeurant, dont la formalisation proprement mathématique tourne explicitement court :

> « *This section is a sketch of what should be investigated more carefully and systematically.* » [11]

mais aux applications et implémentations informatiques vers la musicologie et la musique :

> « *The following development of this book will now descend to more concrete investigations, regarding those fields which are more in the tradition of the composers, music theorists, and performers.* » [12]

Au total, il n'y a guère ici de mathématiques qui soient durablement « autonomes[A] », d'abondantes annexes strictement mathématiques (« *Mathematical Basics* » [13]) soulignant d'ailleurs que ce livre relève de la mathématique appliquée pour ingénieurs musicologues plutôt que de la recherche purement mathématique.

D'où une nouvelle question : comment lire, en musicien pensif, un livre de mathématiques appliquées à la musicologie computationnelle ?

Attachés que nous sommes à l'idée qu'il nous faut, malgré cette difficulté, lire ce livre, et le lire en musicien si l'on tient à prendre mesure exacte des différences entre notre propre idéation et un tel type d'entreprise qui, quoique contemporaine (ou précisément *parce que* contemporaine), se présente à nous comme familièrement étrange[B] – s'attacher à prendre ce type de mesure, n'est-ce pas ce type de courage de penser que notre orientation matérialiste requiert en propre ? –, nous allons privilégier un examen de la méthode de pensée de ce livre plutôt qu'une recension de ses résultats.

6 – Résultats de ce livre

Ce n'est pas que ces résultats soient négligeables, loin s'en faut.

On a déjà évoqué [14] certains d'entre eux. On peut également relever par exemple ceux-ci :

A. C'est-à-dire dont les lois de développement soient proprement mathématiques.

B. Une étrangeté familière plutôt qu'une étrange familiarité – nous laisserons chacun corréler ceci à l'*Unheimliche* (l'« inquiétante étrangeté ») de Freud…

– l'intérêt du logiciel *Rubato* pour prendre mesure exacte de la part proprement mécanisable du phrasé musical, à distance heureuse de la conception idéaliste d'un phrasé comme simple supplément d'âme ;

– l'intérêt d'une formalisation du contrepoint permettant d'expérimenter son fonctionnement avec de tout autres règles que celle du contrepoint traditionnel (Fux), en particulier dans un contexte modal élargi ;

– l'intérêt d'une meilleure compréhension musicologique de la manière dont des ensembles *a priori* disparates et empiriques d'agrégats de hauteurs peuvent consister en réseaux ;

– l'exploration des conséquences de la structure moebiusienne du ruban harmonique tonal…

C'est plutôt que nous voudrions ici nous attacher à une mesure plus globale de ce livre, une mesure qui rende somme toute justice à son ambition – son *intension* profonde – et ne le reçoive pas seulement comme un recueil d'applications informatiques, plus ou moins pertinentes.

7 – Une troisième difficulté, très spécifique

L'examen de la méthode de pensée propre à cet ouvrage débouche alors sur notre troisième difficulté, à la fois la plus spécifique à ce livre et la plus profonde.

Il se vérifie – nous allons voir en détail comment – que ce livre de mathématiques appliquées est porteur d'un projet global explicite : reconstituer un espace de pensée de type pythagoricien où mathématiques et musique puissent être vues comme opérant conjointement, comme constituant un seul vaste supercontinent de pensée que nous proposons d'appeler une *Pangée musimathématique*.

Revenir à Pythagore constitue ici le drapeau d'une cause récusant que mathématiques et musique puissent former des espaces de pensée disjoints et radicalement hétérogènes, qu'elles puissent relever de continents (ou de « mondes ») autonomes dérivant au gré de leurs logiques immanentes bien plus que de leurs *rai*sonances, pour y opposer l'idée d'une adjonction entre ces deux continents, d'un couplage étroit entre ces deux disciplines, d'une forte résonance entre leurs gestes respectifs de pensée en sorte de ressusciter le vieux thème d'une continuité de pensée entre musique et mathématiques.

Un tel type de continuité peut se matérialiser de différentes manières :

– comme *mathémusique* : c'est la voie, on l'a vu [15], soutenue par Moreno Andreatta qui met l'accent sur la productivité des problèmes musicaux *pour* la mathématique contemporaine ; cette voie circule donc principalement[A] de la musique vers les mathématiques ;

– comme *musimathématique* : c'est la voie de Mazzola qui met l'accent sur la productivité musicologique de la mathématique contemporaine des topos ; cette voie circule essentiellement des mathématiques vers la musique/musicologie.

Notons, au passage, la difficulté de distinguer, dans les livres de Mazzola, la musique de la musicologie. L'auteur en effet récuse toute distinction entre musicologie et intellectualité musicale ; mieux : entre écrits philosophiques, musicologiques et musiciens sur la musique, ce qui l'amène par exemple à parler, à propos de l'école pythagoricienne antique, de « *musicologie grecque* » [16].

Notre interprétation de ce parti pris mazzolien d'indistinction est qu'il sert la cause d'un unique espace connexe de pensée qui, plus encore que *musimathématique*, relève alors d'une Pangée *mamuphi* (incorporant donc la philosophie au cœur de son super-continent) :

« *When applied to a complex human activity such as music, category theory offers the conceptual framework generating a new theoretical perspective of the relations between the philosophy of music and the philosophy of mathematics, in fact, by shedding new light on the understanding of the genesis and ontology of musical and mathematical activities.* » [17]

– Indiquons pour terminer une troisième possibilité, plus étrange mais que Rameau pourtant a déployée à partir de la Querelle des Bouffons : celle d'une musique mettant la mathématique contemporaine sous tutelle – plaisante inversion (délirante, il est vrai) de l'antique tutelle pythagoricienne[B].

A. Il y a bien sûr des effets en retour (qu'on dira ici secondaires) dans l'autre sens puisque la mathématique devient ainsi en état de « solutionner » des problèmes musicaux. Mon hypothèse est que dans cette voie, l'aspect musique→mathématiques constitue subjectivement l'aspect principal.

B. Comme on y reviendra, Rameau ce faisant a dû ignorer la révolution eulérienne en matière de rapports *mathématiciens* à la théorie musicale : comme mathématicien (et quel mathématicien !), Euler a explicitement récusé l'ancien paradigme pythagoricien (revendiquant l'exercice d'une tutelle des mathématiques sur la théorie musicale) pour prôner et pratiquer lui-même une égalité de pensée entre mathématiques et musique, égalité qui, loin de susciter de sa part une prudente indifférence, l'a conduit tout au contraire à édifier une théorie mathématique de la musique d'un type radicalement nouveau. Où l'on vérifie qu'émancipations et libérations sont contagieuses…

Renouer avec une conception pythagoricienne en matière de théorie musicale, tenir somme toute que composer de la musique, c'est *tout comme* composer des mathématiques[A], tout ceci conduit ultimement cette problématique mazzolienne à élaborer ce que nous appellerons une nouvelle mytho-*logique* des rapports entre musique et mathématique.

À quelles conditions Mazzola peut-il alors déployer une telle problématique, contemporaine des questions que nous nous posons ?

Tel est l'enjeu de notre lecture musicienne de ce livre : nous éclairer, par contraposition, sur les conditions aptes à soutenir notre propre approche expérimentale en matière de rapport musicien à la mathématique (singulièrement de rapport à la géométrie algébrique des topos).

8 – QUATRE ÉTAPES

Notre lecture symptomale de ce très épais livre nous conduit à distinguer quatre étapes dans son édification d'une problématique *musimathématique* :

1. le couplage étroit d'une application musicologique à sa formalisation mathématique; on inscrira cette complémentation ainsi : *mathématisation*⊗*application*
2. l'interprétation d'un tel couplage comme constitutif de *voisinages induits*, attestant d'une sorte de continuité entre gestes respectivement mathématiques et musicaux en sorte de constituer un geste global *musimathématique*;
3. le débouché de cette interprétation sur la thèse explicite d'une adjonction de pensée entre mathématiques et musique, adjonction qui fixerait la forme propre de la complémentarité *musimathématique*;
4. *in fine*, la ressaisie globale de ce débouché comme constitutive d'une possible fraternisation entre vérité mathématique et beau musical susceptible d'inscrire une sorte de méta-monde, un « univers » réunifiant les divers mondes de la mathématique et de la musique, un Cosmos réconcilié (celui que nous proposons de nommer *Pangée musimathématique*).

A. Mazzola va donner à ce « tout comme » un sens mathématique précis : celui de l'adjonction (au sens fonctoriel du terme).

Soit le processus global suivant :

1. *nœud* mathématisation⊗application

$\Rightarrow$

2. *continuité* du geste

$\oplus$

3. *complémentarité* d'une adjonction

$\Rightarrow$

4. réconciliation *musimathématique* dans une Pangée pythagoricienne

9 – Globalement, une mytho-logique

C'est l'ensemble de ce mouvement de pensée – qui, partant d'une séparation de fait entre musique et mathématiques thématisée comme un écartèlement à résoudre, entreprend de réduire le gouffre entre les deux rives pour dessiner l'horizon d'une réconciliation entre musique et mathématiques (réconciliation orchestrée comme retour à une origine pythagoricienne, non comme création contemporaine) – qu'on dira relever d'une logique du mythe – d'une mytho-*logique* donc – prenant doublement appui, pour ce faire, sur Claude Lévi-Strauss : d'une part sur sa « formule canonique du mythe » qui va nous permettre de donner un sens très précis (quasi-algébrique) à cette mytho-logique, d'autre part sur sa conviction revigorante que la véritable création mythologique contemporaine est en bonne partie l'affaire des scientifiques :

> « À quoi bon, diront certains, s'acharner à percer, analyser, déjouer une stratégie que les mythes répètent sans la renouveler depuis des dizaines, des centaines de millénaires peut-être, alors que pour expliquer le monde, la pensée rationnelle, la méthode et les techniques scientifiques les ont définitivement supplantés ? Le mythe n'a-t-il pas depuis longtemps perdu la partie ? Cela n'est pas sûr, ou du moins ne l'est plus. Car on peut douter qu'une distance infranchissable sépare les formes de la pensée mythique et les paradoxes fameux que, sans espoir de se faire comprendre autrement, les maîtres de la science contemporaine proposent aux ignorants que nous sommes : “le chat” de Schrödinger, « l'ami » de Wigner ; ou bien les apologues qu'on invente pour mettre à notre portée le paradoxe EPR (et maintenant GHZ). […] Les événements que les savants imaginent pour nous aider à combler le gouffre qui s'est creusé entre l'expérience macroscopique et des vérités inaccessibles au vulgaire : Bib Bang, univers en expansion, etc., ont tout le caractère des mythes. […] C'est le dialogue avec la science qui rend la pensée mythique à nouveau actuelle. » [18]

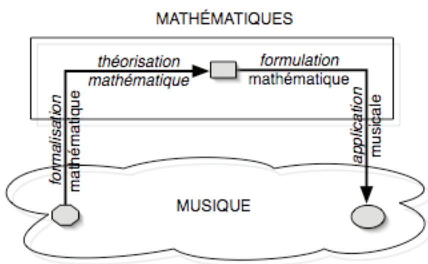
Attaquons notre examen de ce processus en quatre étapes.

10 – Un nœud *mathématisation⊗application* (1)

Mazzola complète sa mathématisation (ou formalisation mathématique de théories musicologiques préexistantes) par des applications spécifiques. C'est par exemple le cas

– pour sa théorie de l'interprétation [19],
– pour sa théorie de la gestuelle de la main du pianiste [20]…

Le nouage d'une mathématisation et d'une application peut se diagrammatiser ainsi[A] :



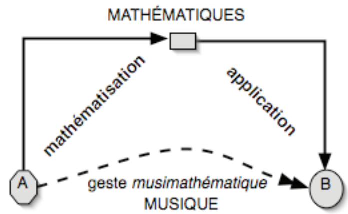
Ce nouage oriente son entreprise vers une cible musicale plutôt que mathématique[B].

11 – Continuité d'un geste (ou thèse des *voisinages induits*) (2)

Le second point, encore plus subjectivement significatif, est que Mazzola s'autorise de ce nouage pour progressivement interpréter ce diagramme selon le schème implicite suivant :

A. En reprenant les conventions utilisées dans un chapitre précédent II. vi. 5…

B. Précisons (avant d'y revenir plus en détail en III. v) que, depuis Euler, une théorie mathématique de la musique pourra se donner comme ambition de stimuler la pensée mathématique *pour elle-même* plutôt que d'éclairer les musiciens sur ce qu'ils ne sauraient pas, ou mal, faire par eux-mêmes…



Ici les objets musicaux A et B ne sont plus *indirectement* reliés par la théorie mathématique mais vont être présentés comme *directement* reliables *dans la musique même*. Dans son vocabulaire mathématique, Mazzola va postuler ainsi que A et B, d'être reliés par le produit d'une mathématisation et d'une application, apparaissent *musicalement* voisins (thèse que nous appelons ici celle de voisinages musicaux *induits* par la théorie mathématique). Pour Mazzola, le passage analytique par la mathématique se révèle « créateur » de nouveaux morceaux porteurs de nouvelles relations *musicales* (entre morceaux).

Voyons cela sur l'exemple canonique[A] que Mazzola maintient au cœur de sa problématique.

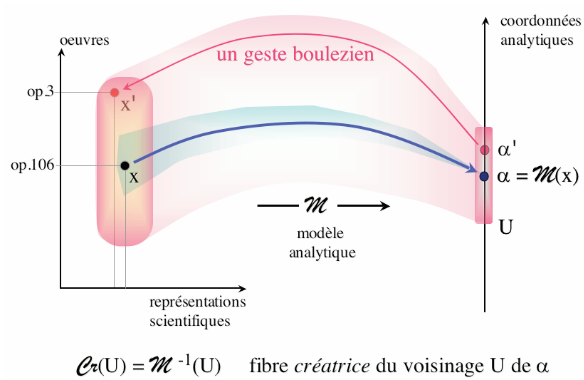
Voisinage musical de la *Hammerklavier*

Mazzola entreprend d'ajouter, à la *Hammerklavier* de Beethoven[B], une œuvre de son cru qui lui serait apparentée : *L'essence du Bleu*, op. 3 de Mazzola [21].

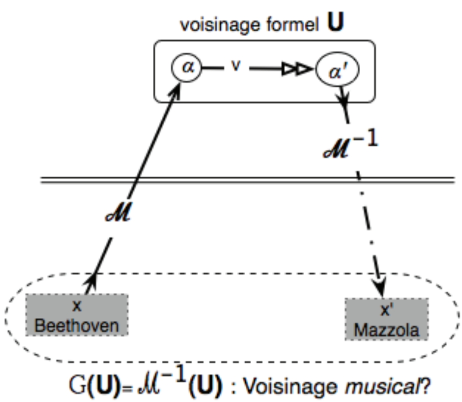
A. On le retrouve, à plus de vingt ans d'écart, dans son premier livre *Gruppen und Kategorien in der Musik* (1985) comme dans son dernier *La vérité du beau dans la musique* (2007)

B. Mazzola répètera le même geste en d'autres circonstances, en « variant » cette fois *Structures Ia* de Boulez. Autant dire que ce geste de pensée n'est pas chez lui occasionnel.

Voici ainsi son schéma [22] :



Redisposons-le, par rotation de 90e, de manière plus conforme à notre façon de diagrammatiser :



La dynamique ici figurée se présente de manière détaillée ainsi :

1. formaliser le morceau musical x [ici Beethoven] en un objet mathématique $\alpha=\mathcal{M}(x)$;

2. varier mathématiquement l'objet α ainsi obtenu selon la variation *mathématico-formelle* notée v en sorte de créer un nouvel objet mathématique α'=v(α) appartenant au voisinage *mathématico-formel* U de α ;

3. interpréter le nouvel objet α’ ainsi mathématiquement engendré en un nouveau morceau musical x’=$\mathcal{M}^{-1}$(α’) ;

4. poser *in fine* que le nouvel objet musical x’, appartenant à $\mathcal{M}^{-1}$(U), se trouve ainsi appartenir à un voisinage G(U) proprement *musical* du morceau x de départ.

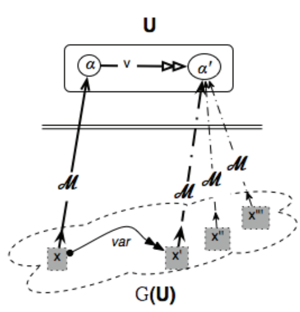
La thèse – qu’on nommera *thèse des voisinages induits* – consiste très précisément à poser ce dernier point : soutenir que le « voisinage » de x (ici nommé « fibre créatrice » et figuré par un ovoïde vertical de même forme et de même couleur que U) auquel x’ appartient (au simple titre du fait que α’ est mathématiquement voisin de α) pourrait être considéré comme un voisinage proprement *musical* ; autrement dit, x’ pourrait être considéré comme une variation *musicale* de x puisque α’ est une variation *mathématique* de α, ce qui s’inscrit formellement ainsi :

$$\mathcal{M}^{-1}\circ v\circ M(x) = \text{Voisinage musical de } x$$

Selon cette thèse, une variation *mathématique* v génératrice d’un voisinage *mathématique* U induirait une variation *musicale* (x→x’) interne à un voisinage *musical* $\mathcal{M}^{-1}$(U)[A].

Remarque plus technique

En vérité, cette thèse pourrait prendre plus naturellement la forme d’une *commutativité* si l’on remarque que la flèche $\mathcal{M}^{-1}$ ne saurait avoir, dans cet exemple, un statut de fonction inverse : $\mathcal{M}^{-1}$ est multiforme au sens où de nombreuses pièces musicales x_n sont susceptibles de répondre à la même formalisation α’. En vérité x’=$\mathcal{M}^{-1}$(α’) veut simplement dire α’=$\mathcal{M}$(x’), et l’on a donc en fait le diagramme suivant :

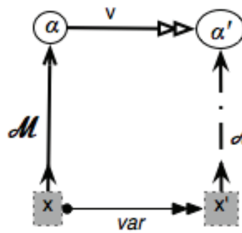


A. On pourrait dire qu’une *déduction* mathématique vaudrait alors *développement* (ou *variation*) musical…

D'où la question : existe-t-il une transformation musicale « var » telle que

1) x'=var(x) [s'entend : x' varie musicalement x] ;

2) le diagramme suivant commute : $\mathcal{M}$°var=v°$\mathcal{M}$



Notons que Mazzola ne pose pas la question du voisinage induit sous cette forme d'une *commutativité* des variations mathématique (v) et musicale (var), mais sous celle d'une « fibre créatrice » G(U) dans laquelle le lien entre x et x' n'est pas précisé.

Le point reste cependant de savoir si l'ovoïde G(U) ainsi construit constitue ou non un voisinage musical de x (ce que le graphisme suggère), donc si la topologie induite sur l'espace des opus par ce geste $\mathcal{M}^{-1}\circ v\circ\mathcal{M}$ correspond bien à la topologie proprement musicale des opus, bref si le morceau x' ainsi ajouté (*L'Essence du Bleu*, op. 3 de Mazzola) est musicalement voisin du morceau de départ x (la *Hammerklavier*, op. 106 de Beethoven).

L'expérience musicale des deux partitions permet de trancher sur l'existence ou non d'un voisinage spécifiquement musical entre x et x' : elle atteste que *L'Essence du Bleu* ne saurait être comprise comme une variation musicale pertinente de la *Hammerklavier*. Qu'il suffise, pour le vérifier, de rapprocher dans ces deux « sonates » le même enchaînement (entre la fin de l'exposition et le début du développement) : par-delà toute appréciation de la valeur proprement musicale de ces deux morceaux, ces morceaux se présentent comme étant sans rapport *musical*, et « l'influence » formelle du premier sur le second ne relève pas d'un ordre *musical*.

Cette étape du processus mazzolien de pensée, soutenant la transitivité des voisinages, donc des topologies, n'est que la seconde dans la constitution globale d'un horizon *musimathématique*. Examinons l'étape suivante.

12 – Complémentarité musique-mathématiques (thèse de l'adjonction) (3)

« The relations between musical and mathematical activities may be describe in terms of adjointness between functors, which extend the functorial setup discussed in The Topos of Music. […] Music and mathematics seem to involve some common structures that can be related by one of the most powerful concepts of category theory : the notion of adjoint functors. » [23]

Ce geste constitutif d'une transitivité se prolonge et s'élargit en une thèse explicite et réitérée de pure et simple *adjonction* entre musique et mathématiques :

> « Tandis que l'activité du mathématicien crée la mise en formule de gestes, celle du musicien crée la mise en gestes de formules. Ces compétences sont parfaitement complémentaires, ce que nous représentons par un diagramme montrant l'association des processus.

$$\text{formules} \; \underset{\text{mathématique}}{\overset{\text{musique}}{\rightleftarrows}} \; \text{gestes}$$

Mathématiquement parlant on a ici la situation d'une adjonction de foncteurs. » [24]

« Nous avons donné [de la tension profonde entre l'action du faire et la pensée du fait] une très courte description au cours du chapitre introductif, par un diagramme "d'adjonction" de processus. Ces deux partenaires adjoints ne sont pas, dans les modèles présents, unifiés, mais définissent les limites d'un dynamisme musico-mathématique de nature « ping-pong », un système commutatif riche, bien sûr, mais pas encore une cohabitation de deux aspects partiels d'un univers complet et cohérent. » [25]

« Complémentarité » formalisée comme « adjonction » des « processus » musicaux et mathématiques, « dynamisme musico-mathématique » ayant pour horizon un « *univers complet et cohérent* » : voilà donc notre Pangée *musimathématique*.

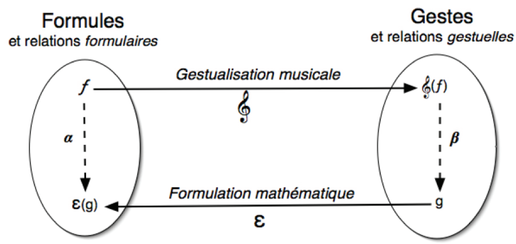
Quel rôle précis l'adjonction fonctorielle joue-t-elle en la constitution d'un tel super-continent connexe ?

Remarquons d'abord que Mazzola thématise ici « musique » et « mathématiques » comme constituant des *foncteurs* plutôt que des catégories ou des topos : la musique en particulier n'est plus vue comme formalisable en topos *of music* (avec objets et relations) mais en foncteur reliant une catégorie de formules et une catégorie de gestes (symétriquement la mathématique est présentée comme foncteur de sens inverse entre ces deux mêmes catégories).

Pour comprendre la nouvelle thèse de Mazzola, détaillons ce qu'est l'adjonction fonctorielle.

« By means of diagrams, mathematics turns gesture into formulæ. […] Formulæ are commutativity relations between gestural paths. Conversely, musical activity "unfreezes" formulæ into gestures. » [26]

La notion fonctorielle d'*adjonction* peut être vue comme une manière de renouveler celle de *dualité*. Elle peut, dans notre exemple, se formaliser et se diagrammatiser ainsi :



$$\forall\varepsilon(g) \text{ et } \forall\alpha{:}f\to\varepsilon(g)\ \exists\beta{:}\text{𝄞}(f)\to g$$

$$\text{et } \forall g \text{ et } \forall\beta{:}\text{𝄞}(f)\to g\ \exists\alpha{:}f\to\varepsilon(g)$$

L'idée générale est la suivante :

1. Admettons que « musique » désigne un foncteur changeant *formules* [faites de notes de musique] en *gestes* [instrumentaux], et relations entre *formules* [musicalement écrites] en relations entre *gestes* [instrumentaux] – posons donc que la musique *gestualiserait* des formules et inscrivons, au moyen de la lettre 𝄞, un foncteur « *gestualisation musicale* ».

2. Admettons de même que « mathématique » désigne un foncteur inverse changeant *gestes* [de pensée] en *formules* [mathématiquement écrites], et relation entre *gestes* [mathématiques de pensée] en relations entre *formules* [mathématiquement écrites] – posons donc que la mathématique *formulerait* des gestes et inscrivons, au moyen de la lettre ε, un foncteur « *formulation mathématique* ».

3. Admettons (cela devient vraiment difficile !) qu'on compte ensemble *formules* musicales et mathématiques dans une même catégorie « *Formules* », et *gestes* musicaux et mathématiques dans une même autre « *Gestes* ».

4. L'adjonction de nos deux foncteurs inverses 𝄞 et ε consiste alors à poser que, pour toute *formule* ε(g) [obtenue par formulation mathématique ε du geste g], à toute relation *formulaire* α de *f* vers ε(g) correspondra une relation *gestuelle* ß de 𝄞(*f*) vers g. Réciproquement, pour tout *geste* g, à toute relation *gestuelle* ß d'un geste 𝄞(*f*) [obtenu par gestualisation musicale 𝄞 de la formule *f*] vers g correspondra une relation *formulaire* de *f* vers ε(g). Il y aurait ainsi bijection entre les relations *formulaires*') ε(g) et les relations *gestuelles* 𝄞(*f*) →g.

Il suffit d'écrire ces formules de l'adjonction pour prendre mesure de l'audace de Mazzola :

– Comment compter ensemble formules mathématiques et musicales en une seule catégorie ?

– Comment compter ensemble gestes musicaux et mathématiques en une seule catégorie ?

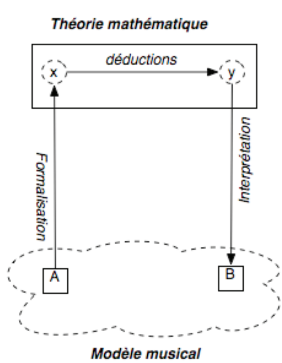
– Comment admettre qu'il y ait la moindre relation ß entre gestes musicaux instrumentaux 𝄞(f) et gestes mathématiques de pensée et qu'il y ait la moindre relation α entre formules musicales et formules mathématiques $\varepsilon(g)$?

– Comment admettre que relations formulaires aussi hétérogènes et relations gestuelles aussi hétérogènes puissent être en bijection grâce à nos deux « foncteurs » musique et mathématiques ?

– On pressent que la formalisation échappe ici à la rigueur du discours mathématique : il s'agit d'introduire sauvagement une notion (fonctorielle) d'*adjonction* en vue d'habiller la cause d'une dualité fraternelle entre musique et mathématiques.

Contraposition

Indiquons au passage que nous récusons, pour notre part, toute idée d'adjonction entre musique et mathématiques, que le couple musique/mathématique prenne alors la forme de deux foncteurs inverses (possibilité que nous récusons absolument) ou qu'il prenne (de façon plus crédible) la forme de deux catégories séparées, associées alors par deux « foncteurs » inverses *formalisation* & *interprétation* reliant une théorie mathématisée à son modèle musical :



Même dans cette dernière conception des rapports musique/mathématiques, il n'y aurait pas d'adjonction entre les correspondances *formalisation* et *interprétation* car ces « fonctions » ne constituent nullement des *foncteurs* :

1. dans la théorie logico-mathématique des modèles, il y a correspondance des objets mais il n'y a aucune correspondance entre les relations – les « influences » musicales entre morceaux A et B ne sont donc pas formalisées dans la théorie mathématique et les relations proprement mathématiques (« déduction ») entre objets mathématiques sont sans équivalent dans le modèle musical ;
2. concrètement pour nous, il ne saurait y avoir (comme on l'a vu [27]) de correspondance entre nos relations musicales (*influences*) et des morphismes mathématiques puisque les influences musicales ne composent guère.

13 – Réduction mythologique de la séparation mathématiques|musique (4)

> *« Our hypothesis is that there exits a "universe" X, whose ontology englobes these two branches [mathematics and music] in a natural way and at the same time, expresses a unified comprehension of music. »* [28]

Au total, l'ensemble de cette « cause » mazzolienne se présente comme une véritable cause mythologique, au sens très précis que Claude Lévi-Strauss nous a appris à entendre dans le mythologique (ou logique des mythes), soit l'idée suivante : la logique mythique consiste, face à une opposition radicale, subjectivement vécue comme un écartèlement, d'entreprendre de la réduire (comme on réduit chirurgicalement une fracture) par construction de deux nouveaux termes plus rapprochés que les termes initialement opposés.

> Mazzola nous livre incidemment la clef de ce déchirement subjectif du *dividu* Guerino, partagé entre ses activités arides de mathématicien et ses pratiques enthousiasmantes d'improvisateur de free-jazz dans un paragraphe intitulé *La crise du 18 mai 2002* [29] qui procède au « *récit d'un drame scientifique* » engendré par le fait – je cite – que « *je me rendis compte que les stratégies de ma propre improvisation jazz étaient de nature différente par rapport aux structures connues et décrites dans l'œuvre que je venais d'accomplir* » c'est-à-dire *The Topos of Music*.
>
> Mazzola en tirait l'idée de « *définir directement la musique à partir des gestes du musicien* » [30], ce qui le renvoyait à la tâche de formaliser

mathématiquement ces gestes musiciens, le tout le conduisant à avancer la thèse d'une adjonction entre foncteurs « musique » et « mathématique » : l'adjonction apparaît ainsi comme constituant la réponse « technique » permettant de réduire une disjonction vécue comme un écartèlement dramatique.

Les variations discernables dans la manière dont Mazzola thématise sa Pangée renvoient directement à ce que Claude Lévi-Strauss nous appris des mythes : un mythe est l'ensemble de ses variantes :

> « Tout mythe (considéré comme l'ensemble de ses variantes) est réductible à une relation canonique du type :
>
> $$F_{x(a)} : F_{y(b)} \cong F_{x(b)} : F_{a^{-1}(y)}$$ » [31]

Claude Lévi-Strauss nous fournit ce faisant une « formule canonique du mythe » [32], qui opère comme mathème de ce que réduction mythologique veut dire. Réécrivons-la sous cette forme, plus maniable :

$$\boxed{\frac{X(a)}{Y(b)} \hookrightarrow \frac{X(b)}{A_{-1}(y)}}$$

Ce mathème formalise l'idée suivante : face à l'opposition entre le terme *a* portant la valeur *X* et le terme *b* portant la valeur *Y*, le mythe va lui substituer l'opposition *réduite* du terme *b* assumant désormais la valeur *X* et d'un nouvel acteur *y* (substantivant l'ancienne valeur *Y*) portant une nouvelle valeur A_{-1} (dérivée de l'acteur *a* inversé).

Le mythe que Mazzola nous instruit se trouve alors formalisable, par exemple dans la variante spécifique donnant son titre au livre *La vérité du beau en musique*, selon le mathème suivant :

$$\boxed{\frac{\text{Vérité (de la mathématique)}}{\text{Beauté (de la musique)}} \hookrightarrow \frac{\text{Vérité (de la musique)}}{\text{Informatisation (du beau)}}}$$

Ce qui se dira ainsi : la contradiction que Mazzola ressent comme insupportable entre la musique porteuse de « beauté » (Cecyl Taylor) et la mathématique porteuse de « vérité » (Alexandre Grothendieck) sera mythologiquement réduite en lui substituant le nouveau couple, plus apaisé, formé d'un côté par une musique désormais capable de vérité (« *la vérité du beau en musique* ») et d'un autre côté par un beau susceptible désormais d'informatisation (entendue comme calcul déposé par une pensée mathématique évaporée).

Indiquons au passage une autre variante du même mythe, où la réduction mythologique s'opère cette fois en produisant d'un côté une « *algèbre de Boulez*[A] », de l'autre une *musique de Mazzola* « variant » *Structures Ia*[B] :

Création (de l'analyse musicale)		Création (de la mathématique)		Une « algèbre de Boulez » mathématiquement inventée
	↪		=	
Rigueur (de la mathématique)		Valeur musicalement synthétique (d'une opération non rigoureuse)		Qualité musicale globale de *Restructures* « variant » librement *Structures Ia*

Faut-il préciser en effet combien cette logique mythologique est sourdement à l'œuvre tout au long du travail de Mazzola, à travers les convocations surprenantes d'un « *Big Bang* » généralisé (dans la physique, la biologie, et même la culture) ou d'un « Principe anthropique » circulant de la cosmologie jusque dans le contrepoint :

> « Le principe anthropique exige que les paramètres fondamentaux de l'univers (*e.g.* vélocité de la lumière, charge électrique élémentaire, constante de gravitation) aient été installés de sorte que notre humanité, ou, plus généralement la biochimie du carbone, devienne possible. » [33]

sans compter ce genre de remarque, difficile malgré tout à soutenir avec rigueur :

> « *We suggest that gestures could play the same role in music as strings in particle physics.* » [34]

14 – Mytho-logiques ?

Que la production mythologique d'une telle Pangée *musimathématique* (où musique et mathématiques ne seraient plus séparées que par la mer intérieure d'un seul super-continent, telles les deux rives européenne et africaine de la Méditerranée gréco-latine) puisse se nourrir ainsi de la pratique mathématique la plus précise et la plus actuelle consonne, je crois, avec ce besoin dividuel de réduire une fracture subjective propre au *dividu* Guerino (Mazzola), partage entre la figure du mathématicien nourri d'informatique théorique et celle du musicien improvisateur nourri de free jazz, fracture qu'on trouve, comme l'on sait, au principe de tout *dividu*, et qu'on retrouve au demeurant également au principe même de notre propre

A. Sous-algèbre, engendrée par des « macroscores »…

B. *Restructures* (2007, 14') : « orchestration » midi à douze voix…

opus sous la forme cette fois du partage entre musicien artisan et musicien pensif, mais également, en tous les cas chez l'auteur de notre opus, entre musicien et militant…

Si tout *dividu* est donc partagé, irrédiablement partagé, et si tout musicien l'est tout particulièrement, doit-il pour autant rêver d'une unification qui le ferait remonter vers une sorte de réconciliation primitive[A] ? Telle est, paradoxalement, la question que nous livre ce vaste et aride travail de mathématicien : une question indirecte sur le musicien plus encore qu'une question directe sur la musique.

Autant dire que lire, en musicien, ce livre ardu de mathématiques appliquées à la musique pour y discerner une *intension* mytho-logique doit nous inciter à nous interroger sur notre propre idéation musicienne : et si finalement notre Idée d'un monde-*Musique* était, elle aussi, un mythe ? Et si la logique de notre idéation, de se refuser d'être une musico-logique (au sens courant du terme), était d'autant plus encline à devenir une mytho-logique ?

Reste, en attendant, qu'il nous revient – à nous musiciens pensifs – de soutenir (contre l'indifférence native du musicien artisan) un rapport proprement musicien à la mathématique contemporaine qui ne soit ni musico-logique (de type applicatif), ni mytho-logique (de type conjonctif).

Notre prochain chapitre sur la logique va nous en donner une nouvelle occasion.

Notes bibliographiques

Références

1. Guerino Mazzola : *The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance* (Birkhaüser Verlag, 2002)
2. Cf. *The topos.*, 19.1
3. *The topos.*, p. 308
4. Cf. *The topos.*, 13.2

A. Comment ne pas voir, en ce recollement d'un univers malencontreusement partagé en deux parties « complémentaires », une variation du mythe d'Aristophane (Platon, *Le Banquet*) où l'humanité, partagée par Zeus en deux moitiés emboîtables hommes/femmes, ne cesse de rêver d'un retour à son union originelle. On suppute que pour Mazzola la musique devrait occuper la position-*femme* et la mathématique la position-*homme* en sorte de dualiser (adjoindre ?) l'hystérie du geste improvisateur et l'obsession de la lettre informatique…

5. Cf. *The topos.,* 7.1
6. Cf. *The topos.,* 14.4, définition 50 (p. 344)
7. Cf. II. vi
8. II. vi. 7
9. *Penser la musique dans la logique fonctorielle des topoi* (in *Penser la musique avec les mathématiques?*; dir. G. Assayag, G. Mazzola, F. Nicolas; Éd. Ircam-Delatour; 2006 ; p. 59)
10. *Penser.*, p. 76
11. *The topos.,* p. 434
12. *The topos.,* p. 437
13. plus de cent pages : pp. 1055-1162
14. II. vi. 5
15. II. vi. 6
16. *The topos.,* p. 530
17. *Diagrams, gestures and formulæ in music* (avec M. Andreatta) *in* Journal of Mathematics and Music (mars 2007 ; p. 24)
18. *Histoire de lynx* (Plon, 1991 ; pp. 10-13)
19. partie X de *The Topos…*
20. partie V de *La vérité du beau…*
21. *The topos.*, § 48.2 (p. 941…); *La vérité.*, chap. 10 (p. 55…)
22. *La vérité.*, p. 31
23. *Diagrams.*, p. 23
24. *La vérité.*, p. 5
25. *La vérité.*, p. 173
26. *Diagrams.*, p. 24
27. II. ix. 3
28. *Diagrams.*, p. 43
29. § 24.1 de *La vérité du beau en musique*
30. *La vérité.*, p. 146
31. *La structure des mythes* (1955) dans *Anthropologie structurale* (p. 252-253)
32. Voir aussi *La potière jalouse* (1983 ; p. 78., p. 207…), *Histoire de lynx* (1991)… Pour une présentation détaillée de cette formule canonique du mythe et de ses enjeux, voir le passionnant livre de Lucien Scubla *Lire Lévi-Strauss* (Odile Jacob, 1998)
33. *Penser.*, p. 61
34. *Diagrams.*, p. 26