VI. Théoriser la musique à la lumière des mathématiques contemporaines

1 – Introduction

Clarifions notre méthode de travail, avant d'attaquer la théorisation proprement dite de notre monde-*Musique*.

Notre Idée de la musique comporte une forte dimension *théorique*, dimension qui a pour spécificité, depuis Rameau, de s'autoconstituer à la lumière des mathématiques [A]. Et bien sûr, comme notre principe du contemporain l'implique, il s'agit là – il ne peut s'agir là – que d'une lumière *contemporaine* : si théoriser la musique implique bien une manière contemporaine de théoriser la musique contemporaine, et si cette manière *contemporaine* s'éclaire bien de la mathématique, cet éclairage ne pourra lui-même venir que de la mathématique *contemporaine*. D'où l'importance ici attachée à l'éclairage que peut nous fournir la figure proprement contemporaine de la géométrie.

Ceci dit, le privilège ainsi accordé à cet éclairage géométrique contemporain pour nos questions de théorie musicale relève, lui, d'un autre rapport : cette fois à la philosophie. Nous spécifions l'enchevêtrement de ces différents rapports en posant que, pour la musique, la lumière de la géométrie contemporaine se déploie à l'ombre de la philosophie contemporaine. Donc la manière privilégiée qu'a la géométrie contemporaine d'éclairer les théories contemporaines de la musique s'adosse elle-même à des orientations philosophiques plutôt que strictement musicales ou mathématiques ; soit :

A. Nous reviendrons, dans le troisième volume, sur les deux autres composantes de toute idéation musicienne (ou intellectualité musicale) que sont les dimensions *critique* et *esthétique*, lesquelles s'éclairent plutôt des autres arts pour la première, des pensées (politiques…) du monde des hommes pour la seconde. Que, parmi les sciences, la dimension théorique de l'intellectualité musicale s'appuie prioritairement sur les mathématiques (plutôt que sur la physique théorique ou la biologie moléculaire) constitue un trait essentiel et non pas contingent qu'on examinera dans la troisième partie de ce livre ; les *rai*sonances mathématiques-musique comme les connivences mathématiciens-musiciens disposent de deux solides bases matérielles : les exigences d'écriture et les soucis proprement logiques que musique et mathématique partagent.

toute conception d'un éclairage des mathématiques vers la musique mobilise implicitement une orientation philosophique particulière. Ou encore : on ne saurait expliciter une manière d'éclairer la théorie de la musique par les mathématiques sans mobiliser implicitement une conception proprement philosophique de ce qu'« éclairage » veut ici dire.

On va, dans ce chapitre, dégager trois manières fort différentes de théoriser la musique à la lumière de la géométrie contemporaine. Nous disposant pour ce faire sous la discipline des principes précédents, nous nous attacherons à dégager l'ombre philosophique particulière qui préside (implicitement) à chacune de ces manières de théoriser. Nous argumenterons d'abord pourquoi privilégier ainsi la géométrie comme figure éminemment contemporaine de l'éclairage mathématique.

2 – « Théoriser » la musique se pratique de bien des manières

Théoriser la musique peut se faire de bien des manières : il y a des théorisations acoustiques, psychologiques, économiques, sociologiques, ethnologiques, psychanalytiques, mais également philosophiques, épistémologiques, cognitivistes, etc. de la musique comme il y en a des théorisations mathématiques, musicologiques et musiciennes. Nous n'examinerons ici que ces trois dernières modalités.

> Si tout ce vaste livre récapitule et met en forme des travaux personnels menés depuis un quart de siècle, ce chapitre s'appuie plus spécifiquement sur dix années de travail collectif mené dans le cadre du séminaire Ircam-Ens *mamuphi* (mathématiques-musique-philosophie). Dans ce cadre, les confrontations entre différentes manières de théoriser aujourd'hui la musique n'ont guère débordé cette triple constitution subjective (mathématique, musicologique et musicienne). Prenons-en acte : les autres manières contemporaines de théoriser la musique se soutiennent de conceptions si lointaines de ce que « théoriser » et « musique » veulent dire qu'aucun partage minimum n'autorise, pour le moment du moins, de réelle rencontre.

Nous allons donc confronter ici trois manières de théoriser la musique à la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie : une manière *mathématicienne*, une manière *musicologique* et une manière *musicienne*.

3 – « Tournant géométrique » de la pensée

Ces trois manières de théoriser la musique partagent, comme on va le voir plus en détail, la conviction explicite qu'un tournant géométrique est intervenu dans la mathématique contemporaine.

Notre propre conviction supplémentaire est qu'un tel tournant a valeur globale : pour la pensée contemporaine en général et pas seulement pour la pensée mathématique. Un heureux tournant géométrique de la pensée est ainsi venu déposer l'ancien et désastreux tournant langagier de la pensée.

On examinera plus en détail, dans différents chapitres spécifiques, la modalité proprement philosophique de ce tournant géométrique dans le travail d'Alain Badiou (ce sera l'enjeu de notre prochain chapitre II. vii), sa forme proprement logique dans le travail de Jean-Yves Girard (chapitre II. xii).

Introduisons succinctement à la dimension native de ce tournant en précisant en quel sens le mot « géométrie » intervient en cette affaire.

4 – En quel sens entendre ici le mot « géométrie » ?

Il ne s'agit pas ici de caractériser la géométrie par des « objets » qui lui seraient spécifiques : par exemple comme « science des figures » (là où l'arithmétique serait la science des nombres) ; plus généralement, on ne tiendra pas que la pensée mathématique se spécifierait du point d'*objets* supposés propres.

Il ne s'agit pas davantage de caractériser la géométrie comme « science de l'espace » [A], ou comme science de la dimension spatiale des objets (là où l'algèbre serait la science de leur dimension temporelle) : pas plus qu'elle n'est *constituable* par un type d'objets, la géométrie ne se spécifierait d'être *constituante* d'un type particulier d'objets.

Géométrie désigne ici un type de point de vue mathématique, une manière spécifique de penser mathématiquement les choses mathématiques : en

A. La mathématique pense des espaces variés et non pas « l'Espace » ; elle ne définit d'ailleurs pas ce qu'elle entend généralement par « espace » et préfère spécifier les différents espaces concrets qu'elle dégage : espaces hyperboliques ou différentiels, espaces de Banach ou de Hilbert, etc…

ce sens, *géométrie* configure un mode original de subjectivité (mathématique) [A] plutôt que d'objectivité.

Comment caractériser cette subjectivité géométrique comme mode spécifique de théorisation mathématique ? [B]

On le fera ici selon trois traits synthétiques.

1. La géométrie attache la pensée mathématique à une théorisation du *lieu*. Ce faisant, la géométrie est constituante de lieux concrets plutôt que d'espaces abstraits. Le mode propre de constitution d'un lieu se faisant selon *la dialectique du local et du global* [C] – un lieu est une figure de consistance d'une telle dialectique –, la géométrie prendra en charge la figure proprement mathématique de constitution dialectique d'un lieu.

2. Le mode spécifiquement géométrique d'appropriation d'un tel lieu s'attache à sa *mesure* : la géométrie prend mesure de ses sites (*géo-métrie*), ce dont la topologie ne se soucie pas ; cette mesure désigne la figure proprement géométrique de la dialectique constituante local/global.

3. Le mode géométrique de penser, loin de s'attacher à la perception, fait confiance (depuis sa fondation euclidienne) à *l'axiomatique* [D] : la géométrie décide résolument sa manière de prendre mesure des lieux sans s'aligner sur l'expérience sensible immédiate.

Au total, la géométrie s'attache à la constitution dialectique, mesurée et axiomatique des lieux.

A. Rappelons-le : philosophiquement conçu, le sujet mathématique se matérialise en une théorie (et non pas en l'individu mathématicien) de même que le sujet musical se matérialise en une œuvre ou en un Œuvre (non en l'individu musicien).

B. Pour une présentation synthétique de la mathématique contemporaine, on se reportera au passionnant livre de Sanders Mac Lane : *Mathematics : Form and Function* (Springer-Verlag, 1986). Par exemple : «*Since we have described Mathematics as a network, we must specify more the nodes of that network – the various special "subjects" into which Mathematics is (or may be) divided. It will turn out that this notion of a subject – a branch of Mathematics – is both useful and elusive.*» (p. 422) Bien sûr dans cette citation «sujet» doit s'entendre au sens courant du terme, mais il me sied qu'il résonne ici avec le concept philosophique homonyme.

C. Qu'il convient, bien sûr, de clairement distinguer de la dialectique particulier/général (ou parties/tout), la dialectique du local et du global s'articulant de manière privilégiée à la dialectique singulier/universel (l'universel se donne dans une singularité locale, dans une «action restreinte»).

D. Sanders Mac Lane (*op. cit.*) : «*Geometry is not a science of actual space but an axiom-based study of space-like configurations; historically the axioms for geometry are the very model of what an axiomatic approach can be.*» (p. 424)

Une des conséquences, empiriquement constatable, de cette manière de concevoir ce que *géométrie* veut aujourd'hui dire est que dans la mathématique contemporaine, *géométrie* se décline de préférence conjuguée à d'autres caractérisations : géométries *algébrique*, *analytique*, *projective*, *différentielle*… [A]

En ce sens, thématiser *géométriquement* une pensée donnée, c'est dégager sa manière propre de constituer axiomatiquement ses lieux (sa constitution dialectique singulière du local et du global) et les opérations spécifiques par lesquelles elle prend mesure de ces lieux et des existences qui, à ses yeux, s'y attachent.

C'est en ce sens qu'une telle orientation géométrique est susceptible d'intéresser le musicien pensif. La dimension géométrique de la logique musicale s'attache ainsi :

– à la configuration axiomatique, par l'écriture solfégique, d'un lieu spécifique : le monde-*Musique* ;
– à la mesure ainsi solfégiquement prise de ce lieu et de ce qu'y exister veut dire ;
– à la constitution dialectique (local/global) de dynamiques d'existence propres à ce lieu (ce seront les morceaux de musique comme faisceau des différentes interprétations d'une même partition) ;
– à la constitution dialectique singulière des dynamiques subjectives en musique : les *intension*s et écoutes à l'œuvre.

Ceci précisé, abordons une à une nos trois manières contemporaines de théoriser la musique.

5 – Manière mathématicienne de théoriser la musique

Cette première manière reprend, dans les conditions mathématiques d'aujourd'hui, le flambeau du grand Euler [B]. Le travail de Guerino Mazzola[1] emblématise aujourd'hui cette tradition mathématique [C].

A. Sanders Mac Lane (*op. cit.*) : « *Any answer to our question* "What is geometry ?" *must inevitably mix geometry with other sources of Mathematics.* » (p. 257)

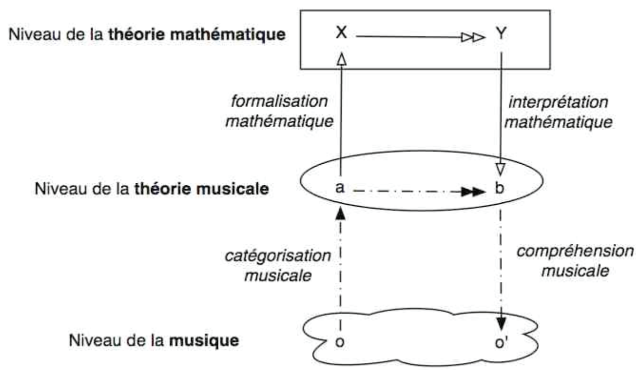
B. Nous l'examinerons plus en détail dans le chapitre III. v de notre troisième volume.

C. Nous y reviendrons plus systématiquement dans le chapitre II. xi que l'on consacrera à son *Topos of Music*.

Théorie d'une théorie

Une théorie mathématique de la musique part toujours d'une théorie préexistante de la musique, que cette théorie – servant au mathématicien de préalable – soit d'ordre musicien (comme à l'époque d'Euler) ou plutôt d'ordre musicologique (comme aujourd'hui pour Mazzola). En effet un mathématicien ne saurait bâtir sa théorie directement à partir de partitions musicales – même s'il sait très bien les lire, le mathématicien ne songera guère à en proposer une nouvelle idée – mais à partir d'analyses préexistantes de ces partitions, à partir donc de théories musicales préformées qui vont lui servir de socle.

On peut imager ainsi son échafaudage [A] :



Par exemple, la théorie de Mazzola entreprendra de formaliser :

– la théorie du contrepoint par Johann Joseph Fux (XVIII^e^ siècle),

– la théorie de l'harmonie tonale par Hugo Riemann (XIX^e^ siècle),

– l'analyse de la *Sonate Hammerklavier* (Beethoven) par deux musicologues Ratz & Uhde (XX^e^ siècle),

– l'analyse de *Structures I. a* (Boulez) par Giorgi Ligeti.

A. Précisons que ce « diagramme » comme ceux qui vont suivre ne fait que figurer spatialement une idée directrice. Il n'a donc de valeur qu'illustrative : les points et flèches qui y figurent n'entretiennent de rapports que métaphoriques avec les objets, morphismes et foncteurs de la théorie des catégories.

Théoriser mathématiquement, c'est formaliser, et par là déformer

Théoriser mathématiquement une théorie musicale existante, c'est la formaliser selon des impératifs mathématiques propres. Cette formalisation, n'étant ni une traduction ni une simple transposition, implique une déformation, un remaniement de la théorie originale si bien que les catégories communes aux deux versants théoriques se révèleront porteuses de sens sensiblement décalés.

Premier exemple

On en prend mesure chez Mazzola, par exemple dans sa formalisation des « cadences » et « modulations » : entre ses concepts mathématiques de *cadence* et de *modulation* et les notions musicales homonymes, les rapports seront d'intersection plutôt que de recouvrement. Expliquons cela.

Pour les besoins légitimes de sa cause, Mazzola ne retient de la modulation musicale que deux propriétés :

– l'existence d'enchaînements harmoniques propres à affirmer une tonalité particulière (ceux qui vont articuler une cadence tonale : par exemple II-V-I) ;

– l'existence d'enchaînements harmoniques en partage entre deux tonalités proches (par mobilisation d'accords intermédiaires pouvant donner lieu à pivotement tonal selon une ambiguïté enharmonique : par exemple II-I-IV en *do* majeur pourra être réinterprété comme VI-V-I en *fa* majeur).

Mais ce faisant,

– la formalisation mathématique retenue reste indifférente à l'ordre des enchaînements harmoniques : elle considérera, par exemple, que l'enchaînement VI→II→V→I (cadence *parfaite*) et l'enchaînement I→II→V→VI (cadence *rompue*) équivalent mathématiquement en un même ensemble non ordonné {I, II, V, VI}, ce qui ne sera pas sans étonner le musicien ;

– de même, la formalisation mathématique considérera que sa « cadence » {II-V} équivaut à l'accord {VII} puisque ce dernier accord (*si-ré-fa* en *do* majeur), ne pouvant apparaître que dans cette tonalité, suffit, à lui seul, à affirmer *do* majeur. Là encore, le musicien aura du mal à reconnaître sa musique, ses cadences et ses modulations : si pour lui l'enchaînement II→V est bien le geste d'une cadence musicale, le simple énoncé de VII ne saurait par contre en tenir lieu, cet accord constituant tout au contraire le prototype de l'accord-pivot polymorphe [A], commun à de nombreuses tonalités.

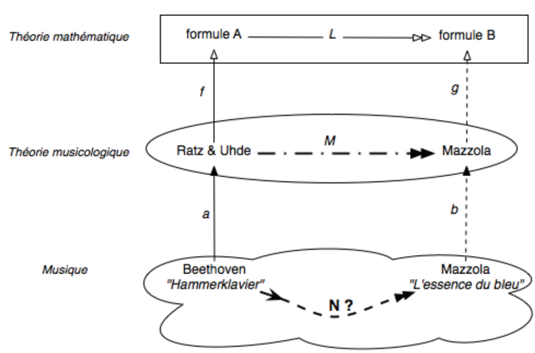
Bref, le musicien ne reconnaît pas exactement *ses* cadences et *ses* modulations dans les concepts homonymes de Mazzola, pas plus qu'il ne pourra reconnaître ses propres fonctions harmoniques dans la formalisation eulérienne du plaisir musical.

Cette torsion relève d'un effet de structure, nullement d'une paresse ou d'une incompétence mathématiciennes : cohésion de l'expérience musicienne et cohérence de la formalisation mathématique, logique musicale et logique mathématique font intrinsèquement deux. Elles peuvent s'approcher, entrer en *rai*sonance, mais elles ne sauraient fusionner ni même se recouvrir.

Second exemple

Illustrons d'un nouvel exemple de quelle manière la théorisation mathématique tend à déformer les voisinages propres au champ musical qu'elle entreprend de formaliser.

Pour mettre à l'épreuve sa formalisation mathématique d'une théorie musicologique (par Ratz & Uhde) de la *Sonate Hammerklavier* (Beethoven), G. Mazzola se demande s'il est possible de trouver un équivalent musical à une formule mathématique telle que B déductible (dans le cadre de sa théorie mathématique) de la formule A (qui formalise la *Sonate* telle que théorisée par les musicologues).



A. Techniquement, cet accord VII relève d'une septième diminuée, laquelle servit à matérialiser l'incertitude tonale en évitant précisément toute logique cadentielle. Ainsi l'accord musicalement le moins « cadentiel » correspond, dans la formalisation mathématique, à l'accord, pour elle, le plus « cadentiel »…

Pour ce faire, Mazzola entreprend de composer un pièce pour piano *L'essence du bleu* dont l'analyse musicale (flèche *b*), menée selon les mêmes principes musicologiques que pour la *Sonate* de Beethoven (flèche *a*), puis mathématiquement formalisée (flèche *g*) selon la même logique que celle ayant servi pour l'analyse de la *Sonate* de Beethoven (flèche *f*), conduise bien à une formalisation B apparentée (flèche *L*) à la formalisation A de départ.

On comprend que ce dispositif puisse assurer qu'il existe, dans la théorie de Ratz & Uhde, une flèche M telle que le rectangle du haut commute (c'est-à-dire telle que g°M = L°f) puisque la nouvelle pièce de musique (*L'essence du bleu*) a précisément été composée sous la contrainte que son analyse soit bien apparentée (par *M*) à l'analyse (par Ratz & Uhde) de la *Sonate* de Beethoven.

Mais le musicien adressera ici au mathématicien une question supplémentaire : existe-t-il également une sorte de flèche N – une flèche qui soit cette fois spécifiquement musicale (et non plus musicologique ou mathématique) – telle que le rectangle du bas (et donc aussi le rectangle complet) commute c'est-à-dire telle que b°N =M°a (et g°b°N = L°f°a) ? Autrement dit, cette construction théorique induirait-elle un rapprochement de nature cette fois spécifiquement musicale entre *Hammerklavier* et *L'essence du bleu* ?

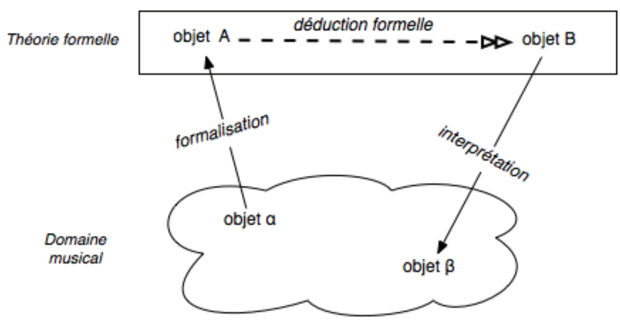
Pour le musicien – qui au demeurant est le seul à pouvoir se prononcer sur l'existence proprement musicale d'un tel rapport –, dans ce cas précis, une telle « flèche » N n'existe pas : à examiner les deux partitions [A], il apparaît en effet qu'il n'y a guère de rapport *musical* entre la *Sonate* de Beethoven et la pièce ainsi générée *ad hoc* par Mazzola, ce qui n'est pas pour nous surprendre : ce n'est pas parce qu'un certain type d'analyse musicologique peut rapprocher (flèche *M*) les structures analytiques de deux pièces que ceci suffit à apparenter *musicalement* ces deux pièces (de même que deux bâtiments ne sauraient être architecturalement apparentés comme espaces sensibles du seul fait que leurs plans enchaîneraient la même enfilade de pièces ou qu'on pourrait décompter le même nombre de colonnes sur leurs façades…).

Ceci pointe donc la déformation du monde musical qu'opère nécessairement une telle théorisation mathématique : en instaurant des voisinages formels qui n'ont pas de contrepartie musicale, elle tend à rapprocher des objets musicaux restant pour le musicien fort éloignés, de même qu'à

A. Cf. II. XI.11

l'inverse, elle pourra éloigner et séparer ce qui pour le musicien constitue un voisinage connexe.

Précisons à nouveau. Cette déformation de la topologie musicale de départ par l'opération mathématique de formalisation ne tient pas à un négligé du mathématicien. Il s'agit là proprement d'un effet de structure, relatif au point précis qui légitime l'édification logico-mathématique d'une « théorie des modèles » : la mathématique saisit le domaine (qu'elle va entreprendre de formaliser) comme espace *discret* d'objets (il est à lui-même son propre voisinage). La formalisation mathématique sera donc formalisation des objets (ici musicaux) mais nullement de rapports *proprement musicaux* entre ces objets, rapports qu'elle ignore *délibérément* [A]. L'enjeu propre de cette formalisation sera précisément de construire un nouveau type d'espace (théorique) où cette fois les nouveaux objets (mathématiques) seront explicitement reliés par des rapports formels de nature déductive, le va-et-vient entre domaine musical et théorie mathématique se faisant alors par formalisation et interprétation des seuls objets (musicaux et mathématiques) mais nullement de leurs rapports respectifs.



Les rapports spécifiquement musicaux entre α et β sont délibérément ignorés par la formalisation.

A. Sur ce plan, le cas particulier où la mathématique formalise une théorie « empirique » préexistante (ici musicologique) – donc un domaine cette fois non « discret » puisque doté de relations internes (de proximité, d'éloignement, d'enchaînement, etc.) et donc de voisinages non réduits à un seul point – ne constitue qu'une variante puisque *formalisation* et *interprétation* continueront de n'y porter que sur les objets, et nullement sur les morphismes respectifs. La théorisation ainsi conçue ne produira donc pas davantage de *foncteur* entre théorie musicologique et théorie mathématique, ne serait-ce d'ailleurs que parce que la théorie musicologique servant de domaine de départ reste trop empirique pour être véritablement formalisable en catégorie mathématique.

Techniquement dit, la théorisation en question ne sera donc pas *fonctorielle* : *formalisation* et *interprétation* ne seront pas des « foncteurs » entre deux catégories. [A]

Ainsi, si l'intérêt spécifique de toute formalisation tient précisément aux rapports contrastés entre un domaine de départ formellement saisi comme *discret* (sans rapports immanents) et un domaine théorique où les objets seront reliés par des déductions formelles, il va de soi que les rapports musicaux (que le musicien connaît bien mais que la théorie ignore) apparaîtront à ce musicien comme déformés et non reflétés par la construction théorique en question. Autant dire que les réserves musiciennes face à une telle théorisation mathématique seront inévitables.

Une théorie coordonnant une gerbe de formalisations

Théoriser mathématiquement la musique engage une large diversité de formalisations que le mathématicien devra coordonner s'il veut bâtir *une* théorie de la musique et non pas accumuler un fatras d'opérations locales.

Mazzola procède à cette coordination dans le cadre qui lui est offert par la théorie grothendieckienne des topos.

Une théorie mathématique de la musique se caractérise ainsi de ne pas se contenter de collectionner des *formalisations* disparates pour prendre spécifiquement en charge leur unification mathématique [B]. On comprend qu'une telle exigence relève d'un ordre spécifiquement mathématique, et aucunement musical. D'où le point suivant.

Une théorie servant la mathématique plutôt que la musique

De telles théories mathématiques, qui ultimement visent la mathématique bien plus que la musique et qui sont l'affaire subjective de mathématiciens – le musicien ne se soucie pas plus de la question de l'unité des mathématiques que le mathématicien ne se soucie d'apporter une nouvelle lecture de telle ou telle œuvre musicale – ne sauraient être d'usage réel pour le *working musician*.

A. *A fortiori*, il ne saurait y avoir d'*adjonction* entre domaine musical et théorie mathématique. Un aspect important des débats entre nos trois manières de théoriser porte sur ce point (voir II. XI).

B. Comme on y reviendra, la théorie eulérienne de la musique sur ce point est exemplaire.

Le musicien, artisan de son art, ne s'intéressera donc guère à ces théories mathématiques, et tout simplement ne les lira pas : ce n'est pas seulement qu'il pourra être rebuté par tel ou tel détail technique; c'est plus essentiellement qu'il n'a guère besoin d'un tel type de théorie, que ce soit évidemment dans sa pratique mais également dans son éventuel souci de théoriser, pour son propre compte, la musique (on examinera plus loin la manière spécifique dont le musicien, cette fois pensif, pourra s'emparer des mathématiques pour théoriser la musique).

Une théorie productrice de nouveaux savoirs sur la musique

Ceci n'implique nullement qu'une telle théorie mathématique de la musique reste entièrement vaine pour le musicien, du moins pour le musicien pensif. Par exemple la formalisation mazzolienne aboutit à ce résultat remarquable : la théorie du contrepoint par Fux et la théorie de l'harmonie par Riemann se révèlent étroitement apparentées dans la théorie mazzolienne par la géométrie d'intervalles qui les ossature, lors même que les deux théories de Fux et de Riemann restent séparées par la chronologie (respectivement XVIIIe et XIXe siècles) et par la pratique des musiciens (en musique, contrepoint et harmonie donnent lieu à des enseignements disjoints, sans unification théorique [A]).

Ainsi cette théorie mathématique révèle des propriétés structurales, jusque-là inaperçues du musicien et du musicologue. C'est dire qu'elle favorise une extension des savoirs sur la musique à défaut de favoriser une invention dans les pratiques musiciennes.

C'est à ce titre que ce type mathématique de théorie tendra à intéresser les musicologues de préférence aux musiciens s'il est vrai que les musicologues se constituent autour de savoirs en extériorité sur une musique conçue comme objet déjà là, quand les musiciens procèdent de connaissances en intériorité d'une musique qu'ils inventent et qu'ils font.

Philosophie spontanée ?

Y a-t-il ici à l'œuvre une « philosophie spontanée » au sens où Althusser écrivait :

A. L'unification ne se réalise que pratiquement, par exemple par l'exercice scolaire du choral et de la fugue…

> « Il existe un rapport entre la philosophie et les sciences, et ce premier rapport peut être décelé chez les scientifiques eux-mêmes, en tant qu'ils sont porteurs d'une philosophie spontanée que nous appelons philosophie spontanée des savants. » [2]

En un certain sens, les mathématiciens ici à l'œuvre n'ont guère besoin d'une philosophie particulière pour légitimer leur entreprise de mathématisation, laquelle constitue, en un certain sens, leur tâche quotidienne.

> Que l'ontologie mathématique s'applique à toute ontique va de soi s'il est vrai que tout étant, ayant pour première propriété d'être, vérifie *ipso facto* les lois de l'être en tant qu'être. Platement dit : s'il est vrai que 7+5=3+9=12, alors cette loi de l'être vaut *a fortiori* pour décompter les canards, les étoiles ou les notes d'une partition…

Quand, par contre, le mathématicien sort du strict cadre de la mise en œuvre de cette mathématisation pour tenter de la légitimer ou pour en tirer quelque parti supplémentaire, alors il lui faudra mobiliser, explicitement ou non, quelque philosophie spontanée.

Ainsi l'argumentation donnée ci-dessus sur la dimension ontologique des mathématiques relève déjà par elle-même de la philosophie (en l'occurrence celle de Badiou qui pose l'équation mathématiques=ontologie [3]), nullement de la mathématique qui n'a nul usage propre du mot « ontologie ».

Mais c'est sans doute du côté du pragmatisme qu'il faudrait chercher la philosophie spontanée des mathématiciens « applicateurs ». [A]

Mentionnons enfin le cas particulier du mathématicien entreprenant de conformer la musique à sa vision mathématicienne : on verra [B] que ce qui fait ici retour, c'est cette figure tutélaire du logos présocratique qu'est la mythologie.

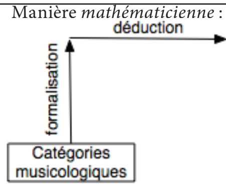
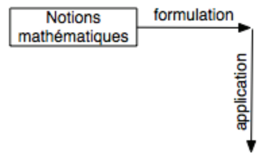
6 – Manière musicologique de théoriser la musique

La manière proprement musicologique de théoriser la musique avec les mathématiques va opérer à l'inverse de la manière mathématicienne : elle partira cette fois d'une théorie mathématique préexistante pour entreprendre de l'appliquer à telle ou telle question musicologique.

A. Telle est en tous les cas la thèse soutenue par Ralf Krömer…

B. Chapitre II. XI

On peut contraster ces deux dynamiques de la façon suivante :

Manière *mathématicienne* :	Manière *musicologique* :
	
Elle formalise mathématiquement des catégories musicologiques (qu'elle prélève dans le corpus musicologique constitué) pour opérer des déductions dans l'espace proprement mathématique de ses objets.	Elle élabore, à partir de notions mathématiques (qu'elle prélève dans le corpus mathématique constitué), une formulation originale susceptible d'être appliquée dans l'espace proprement musicologique de ses catégories.

Somme toute, la manière musicologie de théoriser la musique avec les mathématiques consiste à bâtir un « modèle mathématique » pour un problème musicologiquement donné : si la formalisation mathématicienne peut être conçue comme une « mathématisation » de la musique, la manière musicologique consistera plutôt en une « modélisation » mathématique de la musicologie [A]. D'où que cette dernière manière privilégie, dans la mathématique, son pouvoir calculatoire bien plus que sa puissance conceptuelle.

Ceci engage ce type de théorie musicologique sur la voie de ce qu'on appelle « une musicologie computationnelle ». [4]

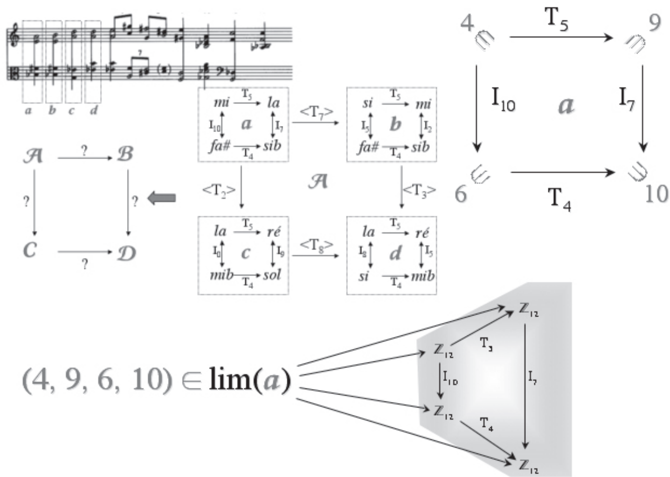
Les travaux de Moreno Andreatta qui témoignent de cette voie s'appuient désormais sur une modélisation en terme de topos. Ceci concerne par exemple ce que la *music theory*, depuis David Lewin, appelle l'approche « transformationnelle » des réseaux de hauteurs. De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'abord de segmenter une partition de musique en groupes de hauteurs – mettons en « accords »… – reliés entre eux (*réseau transformationnel*) par des opérations musicales de *transposition* et d'*inversion* en sorte de produire un recouvrement global de la partition concernée. D'où la constitution d'un espace abstrait : celui des transformations au cours

A. « Modèle » s'emploiera ici à rebours du sens qu'à ce mot dans « la théorie des modèles » (logico-mathématique). Dans cette dernière, *modèle* désigne l'original à copier/formaliser ; dans l'expression répandue « modélisation mathématique », *modèle* désigne le modèle réduit, la maquette à interpréter. Pour une discussion du sens philosophique (néo-positiviste) de ce retournement, on renverra à *Le concept de modèle*, A. Badiou, Maspéro 1969 – rééd. Fayard 2007.

du temps (*progression transformationnelle*) des groupes constitutifs de ce réseau.

Cette insistance moins sur la nature particulière des hauteurs regroupées que sur la structure des transformations auxquelles ces groupes donnent lieu préfigure une matière musicologique qui se prête alors tout naturellement à une modélisation de type catégorielle privilégiant de même les relations sur les objets.



(modélisation d'une analyse musicologique par D. Lewin de l'op. 11 n° 2 de Schoenberg)

Plus précisément, le musicologue, soucieux d'énumérer et classifier ces structures musicales (« réseaux de Klumpenhouwer »), recourra à une modélisation de nature toposique – voir la *limite* pour le dernier diagramme – qui, une fois informatiquement implémentée [5], pourra dégager les bonnes stratégies d'analyse sur les réseaux à l'œuvre dans telle partition. Ainsi la modélisation musicologique par les topos débouchera-t-elle directement sur une analyse musicologique assistée par ordinateur.

Mentionnons également un effet en retour de cette musicologie sur la mathématique puisque certaines questions que cette formalisation adresse à la mathématique pourront susciter chez cette dernière de nouveaux problèmes. C'est là ce que Moreno Andreatta aime à appeler un problème « *mathémusical* » : un problème musicologique adressé aux mathématiques tel que sa formalisation suscite de nouveaux théorèmes ouvrant à de nouvelles applications musicologiques. [A]

Philosophie spontanée

À quelles conditions philosophiques peut-on soutenir une telle problématique ?

Le néopositivisme du musicologue

La philosophie spontanée de cette manière de procéder est clairement le néopositivisme, tel qu'on le trouve à l'œuvre à partir du Cercle de Vienne.

> Althusser en parlait en 1967 comme la «*philosophie spontanée des savants montante*» [6] et précisait : «*La prise du pouvoir du formalisme néo-positiviste logique sur l'idéologie structuraliste va se manifester immanquablement dans les années à venir par l'éviction de la linguistique de son rôle de discipline pilote : c'est la logique mathématique qui va la remplacer dans ce rôle.*» [7]

… matiné de phénoménologie husserlienne

Cette tendance fondamentale n'exclut cependant pas un recours complémentaire du musicologue théoricien à la phénoménologie d'obédience husserlienne.

Celle-ci, en effet, rend compte de son rapport à «l'objet musical», et ce de deux manières :

– en accordant une place centrale à la question du «sens» : la consistance d'un phénomène se jouerait dans son sens, dans le fait qu'il aurait ou serait un sens (ici musical) ;

– en thématisant ce sens comme constitué par une visée particulière : comme relevant essentiellement d'un «pour» quelqu'un. L'apparaître devrait être ici saisi comme apparaître «pour» un «sujet» (individuellement entendu), en sorte qu'à tout apparaître, il faille supposer l'existence d'un sujet (individuel) de cet apparaître.

A. Il devrait donc, à mon sens, s'agir plutôt d'un problème «*mathémusicologique*»…

D'où un couplage essentiel objet/sujet (où le sujet serait constitutif du sens de l'objet) qui s'ajuste à la vision spontanée des choses tant par le musicologue que par le musicien [A].

Emblème : la *music theory*

L'emblème de cette manière de procéder se trouve dans cette *music theory* américaine (celle qui a eu Ernst Krenek [B] pour précurseur, Milton Babbitt [C] pour fondateur, Edward T. Cone et David Lewin [D] pour principaux successeurs) dont il est légitime de tenir qu'elle a entrepris d'enterrer académiquement (sous couvert de « système dodécaphonique ») ce qu'il y avait d'événementiellement novateur chez Arnold Schoenberg [8] en sorte qu'on puisse soutenir que, *comme Freud, Schoenberg est mort en Amérique.* [E]

7 – Manière *musicienne* de théoriser la musique

Reste une troisième manière, fort différente, de théoriser la musique à la lumière des mathématiques : celle du musicien – s'entend bien sûr le *working* musicien (il n'y en a d'ailleurs guère d'autre !).

Le musicien se distingue globalement des deux orientations précédentes en ce que sa théorisation ne visera guère à produire une « théorie » comme telle : sa théorisation relèvera plutôt de ce que Louis Althusser avait appelé une « pratique théorique », soit une intervention dont l'enjeu n'est plus la constitution d'un système théorique, stable et transmissible (« une théorie »), mais le dégagement d'une idée musicienne de la musique. À ce titre, on dira que la théorisation proprement musicienne participe de l'*idéation* musicienne de la musique.

Méthodologiquement, le recours aux mathématiques pour théoriser ainsi la musique se déploiera sous le signe de ce qu'on appellera, à la suite de Gaston Bachelard, une *expérimentation* de la pensée : il s'agira pour le

---

A. Voir exemplairement le cas d'André Boucourechliev que l'on détaillera dans un chapitre spécial (III. viii) de notre prochain volume.

B. 1900-1991

C. 1916-2011

D. 1933-2003

E. Cf. « *Freud est mort en Amérique* » (Élisabeth Roudinesco) : si Sigmund Freud, à la différence d'Arnold Schoenberg, est mort à Londres, l'œuvre Freud fut enterrée aux États-Unis (avant que Lacan n'entreprenne de la réactiver, ailleurs).

musicien de mettre en jeu un double rapport de formalisation et d'interprétation (entre catégories musicales et concepts mathématiques) en sorte de mettre sa pensée discursive à l'épreuve de la cohérence mathématique.

Trois exemples

Donnons pour cela trois exemples, empruntés au travail d'idéation propre à ce livre. Dans chacun d'eux, le point de départ pour le musicien est constitué par un problème qu'il s'agit d'arriver à penser lors même qu'aucun outil théorique répertorié n'existe pour ce faire. À chaque fois il s'agit donc pour lui d'inventer un cadre de travail ajusté au problème singulier qui initie sa recherche.

1. Théoriser l'audition musicale

Nous avons déjà rencontré le premier lorsque nous avons entrepris [F] de différencier musicalement l'audition, d'un côté de la perception, et d'un autre côté de l'écoute.

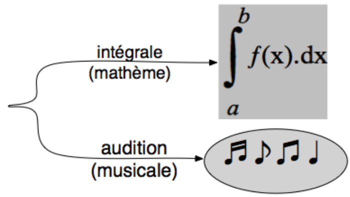
L'idée de départ pour traiter ce problème a été la suivante : et si l'audition, conçue comme une perception totalisante, opérait comme opère une intégration mathématique ? À quelles conditions serait-il alors possible de penser plus avant l'audition musicale sous l'hypothèse d'une mise en parallèle

$$\frac{\text{intégration (mathématique)}}{\text{audition (musicale) ?}} \;?$$

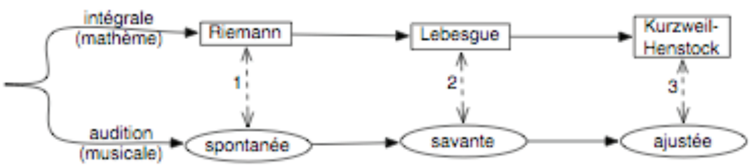
Il s'agissait, à partir de là, de monter un dispositif expérimental qui permette de tester la validité de cette hypothèse de travail. D'où l'examen simultané des différents types d'audition musicale communément pratiqués et des différents types d'intégrale inventés par les mathématiciens à partir de Riemann [G]. L'expérimentation a tenu alors à notre capacité de mettre en rapport de formalisation/interprétation les différentes auditions et les différentes intégrales :

F. Chapitre I. IV

G. Le mathématicien Bernhard Riemann (1826-1866), et non pas le musicologue Hugo Riemann (1849-1919) dont il a été question plus haut…



Le résultat en a été la mise en rapport détaillé d'un côté de trois types d'intégrale (chronologiquement ordonnés par l'histoire mathématique : Riemann, Lebesgue, Kurzweil-Henstock), de l'autre de trois types d'audition (*spontanée*, *savante*, *ajustée*), chronologiquement ordonnés dans l'appréhension musicienne d'une même pièce :



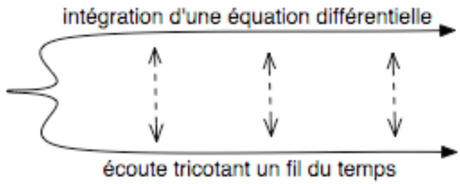
2. Théoriser l'écoute musicale

Nous connaissons également ce second exemple. Le problème de départ cette fois était le suivant : comment rendre compte du travail musical de l'écoute, de l'écoute musicale comme activité immanente à l'œuvre ?

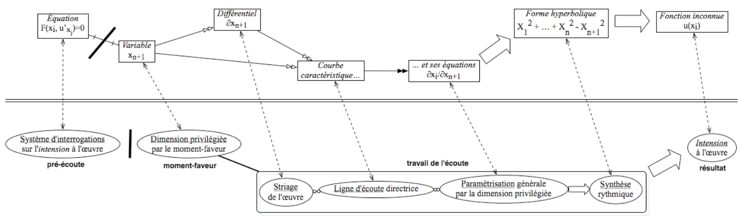
Plus précisément comment, après le moment-faveur, l'écoute musicale trace-t-elle un fil qui traverse l'œuvre de part en part, un fil d'écoute constituant le fil rouge (ou fil conducteur, ou filigrane) de son opération globale propre ?

L'idée de départ a été inspirée par le travail d'Albert Lautman sur le temps [A]. À partir de là, il s'agissait de monter un dispositif expérimental qui dualise d'une part les opérations musicales de l'écoute et d'autre part les opérations d'intégration différentielle telle que Lautman les avait exhaussées :

A. Cf. chapitre I. viii



Le champ expérimental ainsi déployé peut être diagrammatisé de la manière suivante :



3. *Théoriser un monde-*Musique *comme topos ?*

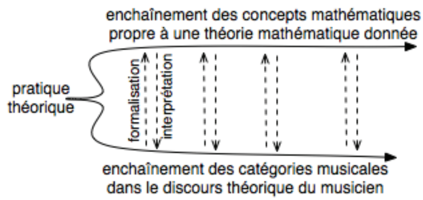
Notre troisième exemple porte sur ce qui va nous occuper dans les prochains chapitres : comment théoriser le monde-*Musique* à la lumière de la théorie grothendieckienne des topos ?

Admettons en effet qu'un musicien pensif d'aujourd'hui éprouve le besoin de théoriser en quel sens la musique peut former un monde propre – comme l'on sait, les bonnes raisons ne manquent pas à ce type de besoin… Ce musicien voudrait donc soutenir en pensée qu'il existe bien un monde de la musique (et pas seulement une région approximativement délimitable dans un univers général) et un seul, et que ce monde, quoiqu'intérieurement diversifié (comme tout monde !), reste connexe (tout ce qui s'y passe en quelque endroit que ce soit concerne en droit tout autre endroit). Bref, le musicien voudrait pouvoir dire de la musique ce qu'Alain Connes dit de la mathématique : « *Il n'y a qu'un monde mathématique* » [9] et « *ce monde mathématique est connexe* » [10].

Mais pour cela, comment procéder ? Comment asseoir en pensée une telle idée musicienne d'*un* monde musical ?

Le musicien pourra alors se tourner vers la mathématique en se disant [A] : « Le concept grothendieckien de *topos* fournit une forte idée mathématique contemporaine de ce qu'est un monde ; mettons donc notre idée musicienne d'un *monde* musical à l'épreuve de cette idée mathématique de *topos.* »

D'où l'ouverture d'une pratique théorique consistant à explorer de concert le double enchaînement des concepts mathématiques et des catégories musicales selon le mouvement suivant :

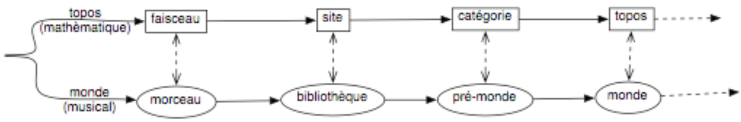


Dans notre exemple – comment théoriser, à la lumière de la mathématique grothendieckienne des topos, la musique comme monde ? –, cette expérimentation va nous suggérer de :

1. Formaliser un morceau de musique comme *faisceau* des exécutions-interprétations de sa partition ;
2. Formaliser la bibliothèque des partitions de musique comme *site* de ses quodlibets (ou pots pourris) ;
3. Formaliser le monde de la musique comme *catégorie* des morceaux extraits de cette bibliothèque ;
4. Formaliser le monde de la musique comme *topos* de tous ces morceaux-faisceaux ;
5. Tirer, en cours de route, toutes conséquences adéquates en matière d'objets et relations en musique.

Ce projet peut être ainsi diagrammatisé :

A. Il y sera incité par le livre *Logiques des mondes* d'Alain Badiou (Seuil, 2006) qui soutient que le concept philosophique de *monde* doit aujourd'hui se déployer sous condition de la catégorie mathématique de *topos*.



Comme on le verra, cette expérimentation, à la différence des deux précédentes, va rencontrer d'inattendues difficultés – ce qui est la moindre des choses pour toute expérience qui se respecte : le succès n'en est pas garanti d'avance ! – si bien qu'on devra interrompre l'expérience à sa troisième étape.

Une théorisation proprement musicienne

On pressent que cette expérimentation musicienne des concepts mathématiques n'intéressera guère les mathématiciens, les effets attendus d'une telle théorisation restant intrinsèquement musicaux.

Elle n'intéressera guère plus les musicologues qui n'y reconnaîtront guère les procédures réglant leur production « objective » de savoirs. [A]

Philosophie spontanée

La philosophie susceptible d'accompagner en pensée cette manière musicienne de faire est celle qui donne droit :

– d'une part à la science comme pensée, et non comme jeu de langage, bien-dire, ou technique de manipulation des étants ;
– d'autre part à l'art également comme pensée, pensée autonome, donc non normée par la science [B] ;
– ensuite à la philosophie comme réfléchissant, pour son compte propre [C], les contemporanéités éventuelles entre pensées essentiellement hétérogènes ;

A. Pour qu'un musicologue puisse s'intéresser à une « idée musicienne », il lui faut d'abord la vitrifier en « objet » musicologique…

B. Il s'agit ici de se battre, comme toujours, sur deux fronts : contre le romantisme réduisant la pensée à sa modalité artistique et contre le positivisme réduisant symétriquement la pensée à sa modalité scientifique.

C. Essentiellement celui des concepts de *vérité* et de *sujet*…

– enfin à la pensée comme travail visant à faire émerger telle ou telle figure de vérité accompagnée des indispensables nouveaux énoncés que cette procédure suscite.

Contentons-nous d'indiquer où trouver de telles philosophies par un petit bouquet de citations.

Gaston Bachelard

« Il faut rompre avec ce poncif cher aux philosophes sceptiques qui ne veulent voir dans les mathématiques qu'un langage. Au contraire la mathématique est une pensée. » [11]

« Avant tout, il faut savoir poser des problèmes. Et quoi qu'on en dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce *sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique.* » [12]

« L'esprit peut changer de métaphysique ; il ne peut se passer de métaphysique. » [13]

« Toute expérience sur la réalité déjà informée par la science est en même temps une expérience sur la pensée scientifique. » [14]

Albert Lautman

« Que l'expérience mathématique soit la condition *sine qua non de la pensée mathématique, cela est certain.* » [15]

« Les mathématiques appartiennent bien au domaine de l'action. » [16]

« La raison des rapports de la dialectique et des mathématiques réside dans le fait que les problèmes de la dialectique sont concevables et formulables indépendamment des mathématiques, mais que toute ébauche de solution apportée à ces problèmes s'appuie nécessairement sur quelque exemple mathématique destiné à supporter de façon concrète la liaison dialectique étudiée. » [17]

Jean Cavaillès

« L'activité des mathématiciens est une activité expérimentale. » [18]

« C'est d'une épistémologie naïve que faire naître les objets mathématiques par abstraction à partir du réel. En fait, il y a développement autonome d'opérations qui, dès l'origine, sont mathématiques. » [19]

« L'activité des mathématiciens est une activité expérimentale. Par expérience, j'entends un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes. » [20]

« La résolution d'un problème possède tous les caractères d'une *expérience* : construction soumise à la sanction d'un échec possible, mais accomplie conformément à une règle. » [21]

Alain Badiou [A]

« Loin d'indiquer un dehors de la pensée formelle, la théorie des modèles règle une dimension de l'immanence pratique des sciences, de reproduction des conditions de production. » [22]

« Le concept de modèle ne désigne pas un dehors à formaliser mais un matériau mathématique à éprouver. » [23]

« Les systèmes formels sont le temps expérimental, l'enchaînement matériel de la preuve, après celui, conceptuel, des démonstrations. » [24]

« Toutes les sciences sont expérimentales. » [25]

« *Modèle* désigne l'articulation conceptuelle, pour autant qu'on la rapporte à un dispositif expérimental particulier : un système formel. » [26]

8 – Au total…

Résumons nos trois grandes manières d'un seul tableau (*voir p. 139*).

Des rapports entre ces trois théorisations

Il est clair que chaque orientation ici distinguée dispose de sa propre cohérence et qu'il n'existe pas de position en surplomb [B] qui autoriserait de hiérarchiser nos trois théorisations.

Le tableau précédent indique cependant que le 3 de nos orientations peut se décompter, de trois manières, en 2+1.

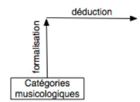
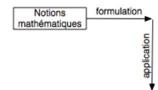
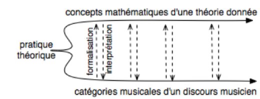
*Complémentarités **mathématiciens/musicologues***

D'abord positions mathématicienne et musicologique s'y présentent comme duales et/ou complémentaires. C'est bien ce qui autorise une

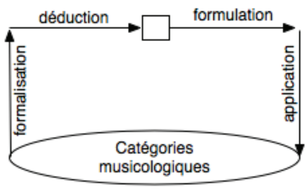
---

A. En nous limitant ici à son premier livre de philosophie, *Le concept de modèle* (1968). Nous reviendrons plus en détail, dans le prochain chapitre, sur sa philosophie.

B. La philosophie ne relève pas d'un tel point de vue de Sirius…

	Mathématisation ou *formalisation* mathématicienne	**Modélisation** ou *application* musicologique	**Expérimentation** ou *pratique théorique* musicienne
			
Enjeux de cette théorisation :	faire de la mathématique tout en élargissant la puissance des mathématiques et consolidant leur unité	produire, en extériorité objectivante, de nouveaux *savoirs* sur la musique	Approfondir, en intériorité subjectivante, la *connaissance* musicale
Résultat de cette théorisation :	une théorie (mathématique)	une théorie (musicologique)	une idée musicienne de la musique
La musique est :	une origine indirecte (médiée par la musicologie)	une cible indirecte (médiée par la musicologie)	un espace de pensée sensible
La mathématique est :	une cible	une origine	un espace de pensée ontologique
Les mathématiques concernées prennent la forme de :	*théories*	*formules & équations*	*concepts*
Les rapports musique-mathéma-tiques privilégient :	les formalisations	les interprétations	les *rai*sonances, donc les mathèmes

nouvelle manière, cette fois *mixte* [A], de théoriser la musique avec les mathématiques, manière qui enchaîne *mathématisation* puis *application* :



*Connivences **mathématiciens/musiciens***

On peut ensuite relever qu'orientations mathématicienne et musicienne suscitent de plus étroites connivences entre pensées en intériorité que n'en provoque une pratique musicologique de la modélisation fortement technicisée, privilégiant la puissance de calcul des mathématiques et extériorisant la dimension « objective » de la musique.

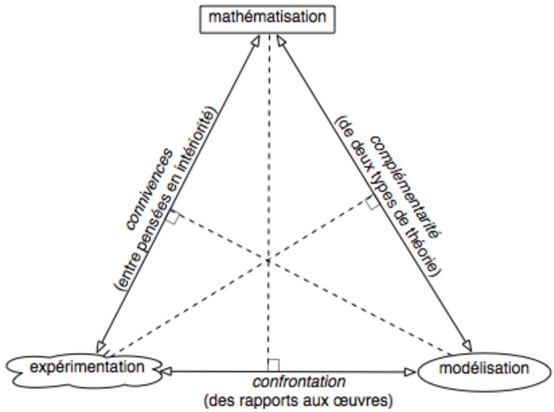
*Confrontations **musiciens/musicologues***

Enfin, théoricités musicologiques et musiciennes se rencontrent autour des partitions musicales puisqu'elles y accordent la même attention directe. Ceci entretiendra entre elles ce qu'on appellera ici, d'un doux euphémisme, une saine émulation.

Géométrie générale

L'expérimentation musicienne étant « orthogonale » à la complémentarité des théories mathématique et musicologique tout autant que la modélisation musicologique l'est aux connivences entre pensées en intériorité (mathématicienne et musicienne) et que la mathématisation l'est aux confrontations musiciens/musicologues en matière de partitions, la géométrie qui procède de ces rapports pourra être ainsi figurée :

A. Cf. II. xi.10



Un contrepoint…

Au total, et selon une métaphore cette fois musicale, les rapports de nos trois théoricités donnent forme de contrepoint au cours polyphonique de ces confrontations.

Comme les musiciens le savent bien, ce sont les dissonances – non les consonances – qui font la musique, et ces dissonances, au moins depuis Schoenberg, n'ont plus besoin d'être résolues pour rester musicales.

Le musicien sera donc en droit d'attendre le meilleur de ces dissonances/orthogonalités entre manières mathématicienne, musicologique et musicienne de théoriser la musique à la lumière de la géométrie contemporaine.

Notes bibliographiques

Références

1. Voir ses deux ouvrages de référence :
   – *The Topos of Music*, Birkhaüser, Basel, 2002
   – *La vérité du beau dans la musique*, Delatour, Paris, 2007
2. Voir p. 99 de ses « cours de philosophie pour scientifiques » (Ens, 1967) édités chez Maspéro (1974) sous le titre *Philosophie et philosophie spontanée des savants*
3. Cf. *L'Être et l'événement…*
4. On trouvera dans le *Journal of Mathematics and Music* de nombreuses contributions à ce nouveau type de musicologie.

5. Voir *From a Categorical Point of View : K-nets as Limit Denotators* (G. Mazzola et M. Andreatta, *Perspectives of New Music*, 44-2, 2006)
6. *op. cit.*, p. 112
7. *Du côté de la philosophie*, 18 décembre 1967 – in *Écrits philosophiques et politiques*, p. 292
8. Sur tout cela, on se reportera à mon *La singularité Schoenberg* (Éd. L'Ircam-L'Harmattan, 1998)
9. *A View of Mathematics* : http:/www.aalainconnes.oorg/docs/maths.pps
10. *Les déchiffreurs*, p. 14, Belin, 2008
11. *L'activité rationaliste de la physique contemporaine* (10|18, p. 42).
12. *La formation de l'esprit scientifique* (p. 14)
13. *La philosophie du non* (p. 13)
14. *Le rationalisme appliqué* (p. 54)
15. *id.* p. 630
16. *id.* p. 630
17. *id.*, p. 606
18. Débat avec I. Lautman du 4 février 1939 (voir *Œuvres complètes de philosophie des sciences* de Jean Cavaillès, Hermann, 1994 ; p. 601)
19. *Du collectif au pari* (1939) (voir Œuvres complètes de philosophie des sciences de Jean Cavaillès, Hermann, 1994 ; p. 642)
20. Débat avec I. Lautman., p. 601
21. Débat avec I. Lautman., p. 594
22. p. 127
23. p. 133
24. p. 125
25. p. 137
26. p. 137