V. La première théorie mathématique de la musique : Euler

1 – Introduction

Léonard Euler (1707-1783) a déployé la première véritable théorie mathématique de la musique. Certes, il y eut bien, avant lui, des conceptions mathématiques de la musique – à commencer, bien sûr, par celle de Pythagore – mais celles-ci théorisaient le matériau sonore musicalement mis en œuvre (sa nature acoustique comme son engendrement instrumental) sans pouvoir mathématiser une logique musicale spécifique – singulièrement sa part discursive – qui n'a vraiment existé de manière autonome qu'à partir de la fin du Moyen Âge. La possibilité d'une théorie mathématique de la musique ne s'est donc véritablement constituée qu'à partir du XVIIe siècle.

Euler s'est attelé à cette tâche, avec une puissance mathématicienne sans égale.

Le déploiement de cette première théorie mathématique de la musique, engagé dès les années 1730, s'avère strictement synchrone du déploiement de l'entreprise ramiste que nous venons d'examiner.

Il se trouve même que ces deux développements parallèles du musicien et du mathématicien vont donner lieu à une rencontre – *scène primitive* des difficiles rapports entre mathématiciens et musiciens – qui va prendre, en 1752, la forme d'un échange épistolaire direct entre Euler et Rameau, au moment même où, comme on l'a vu, ce dernier intègre sa théorie musicale à une intellectualité musicale diversifiée.

Les *rai*sonances et affinités mathématiques-musique sont une chose. Les alliances et connivences mathématiciens-musiciens en sont une autre, comme l'épisode Euler-Rameau de 1752 va nous le montrer.

En cette « scène primitive » en effet, nous allons découvrir d'un côté un mathématicien récusant l'ancienne disposition subjective pythagoricienne ou scolastique, convaincu d'une autonomie musicale qu'il ne cherche nullement à réduire en sorte de réinstaller la musique sous tutelle mathématique

– tout au contraire, l'attitude d'Euler envisage l'existence de lois musicales spécifiques comme une heureuse opportunité pour la mathématique de prouver sa nouvelle capacité formalisatrice – et, d'un autre côté, un musicien restant sourd aux possibilités d'alliance qu'offre cette nouvelle subjectivité mathématicienne pour n'y entendre qu'une prolongation de la vieille rivalité entre conceptions mathématiques (pythagoriciennes) et musicales (aristoxéniennes) de la musique.

2 – La manière eulérienne de théoriser mathématiquement la musique

« *Euler ne lâchait jamais ses idées* » Don Zagier [1]

La théorie eulérienne de la musique, engagée dès 1731 (Euler avait alors vingt-quatre ans) et prolongée jusqu'à la fin de sa vie, constitue à différents titres une manière mathématique de théoriser sans précédent : non seulement son « objet » – la musique de son temps – est neuf (il s'agit de la musique tonale qui a émergé depuis un siècle) ; non seulement ses « outils » théoriques – la mathématique eulérienne – sont également neufs (comme on va le voir, Euler mobilisera ici la palette entière des nouvelles disciplines mathématiques en cours de déploiement) ; mais, plus encore, le rapport entre cet « objet » et ces « outils » – la manière eulérienne de concevoir ce que *théoriser* veut mathématiquement dire – est également neuf : on va proposer ici, à la suite de Christian Houzel [2], de le concevoir comme une *formalisation*.

À tous ces titres, cette théorie eulérienne (formalisation de la musique tonale selon la mathématique du XVIIIe) se conforme à notre *principe du contemporain* : une théorie mathématique de la musique *contemporaine* (ici tonale) doit être une théorie, mathématiquement *contemporaine*, de la musique.

Nouvelle conception des rapports mathématique-musique

La théorie eulérienne de la musique s'adosse à une nouvelle conception mathématicienne des rapports entre mathématiques et musique.

Rupture avec l'ancienne opposition Pythagoriciens/Aristoxéniens…

Cette théorie assume d'abord explicitement de rompre avec l'antique polarité Pythagoriciens/Aristoxéniens, et tout particulièrement avec la manière des disciples de Pythagore d'arithmétiser la musique : comme Euler l'écrit à Rameau en 1752 [3], ces Pythagoriciens « *se sont égarés dans leurs nombres, et y ont mêlé de leur caprice* » si bien que « *les Aristoxéniens ont eu bien raison de se moquer de leur théorie prétendue* ».

C'est ainsi la grandeur d'Euler de ne pas traiter ces questions d'un point de vue corporatiste (« mathématiciens » *vs* « musiciens ») et de savoir reconnaître, quand il le faut, les limites de ses confrères.

… sans pour autant céder sur la singularité mathématicienne

Pour autant Euler n'entend nullement céder sur la spécificité de la subjectivité mathématicienne. En l'occurrence il s'agit pour lui de sauver son emblème *Pythagore* en le préservant du dogmatisme réducteur de ses disciples :

> « *Lorsqu'on trouve défectueuse cette théorie [des Pythagoriciens] […], il me semble qu'on n'en doit pas accuser leurs premiers principes mais plutôt les conséquences qu'ils en ont tirées trop témérairement.* » [4]

L'autonomie musicale et reconnue et non plus combattue

Le point nouveau tient à la manière dont Euler donne mathématiquement droit à l'existence d'une autonomie du phénomène musical : en pratique, il s'agit pour lui de rompre avec l'idée (« pythagoricienne ») que les lois musicales ne seraient qu'un pur et simple cas particulier de lois arithmétiques générales. Euler rehausse ainsi :

– l'autonomie du plaisir musical par rapport au simple agrément physiologique (comme on va longuement y revenir, ce sera l'enjeu central de sa théorisation des suavités harmoniques) :

> « *La théorie de la musique est fondée sur deux principes. Le premier qui consiste dans l'exacte connaissance des sons, appartient à la physique. L'autre, puisé dans la métaphysique, a pour but de définir comment il se fait que l'ensemble de plusieurs sons simultanés ou successifs éveille en nous le sentiment du plaisir ou de l'aversion.* » [5]

– mais également la spécificité de l'habitude musicale qui, à ses yeux, ne relève pas d'un pur arbitraire ou d'un conformisme musicien mais touche à la manière dont le musicien apprend les lois propres de la musique : en musique l'*habitude* n'est pas *constituante* (des lois musicales) mais bien *constituée* car elle est la discipline par laquelle la musique instruit le musicien [A] :

« On doit nécessairement rejeter l'opinion de ceux qui croient que la musique dépend de la seule volonté des hommes, que la nôtre nous plaît uniquement parce que nous sommes habitués à l'entendre. » [6]

« L'habitude est excellente, non pour persuader qu'une composition musicale est bonne, quand même elle déplairait à d'autres, mais pour exercer l'organe de l'ouïe et pour le perfectionner à tel point qu'il puisse se rendre compte de tout ordre qui s'y rencontre. » [7]

– la nature singulière de la joie et de la tristesse proprement musicales (c'est-à-dire attachées à la singularité des pratiques musicales) : joie et tristesse musicales ne sont pas des particularisations (en musique) d'affects généraux, préformés ; elles procèdent de nouveaux rapports (musicaux) à de nouvelles choses (musicales) si bien qu'en instituant de nouvelles pratiques, la musique étend la palette existante des joies et tristesses en de nouvelles modalités d'affects :

« Tous les objets dans lesquels nous découvrons un certain ordre, plaisent ; ceux dont l'ordre est simple et facile à reconnaître, font naître la joie ; mais ceux dont l'ordre, plus compliqué, est plus difficile à saisir, produisent la tristesse. » [8]

« Nous ne parlons pas de cette espèce de tristesse que l'on compte parmi les émotions de l'âme et qui naît de la contemplation d'une imperfection. La musique ne produit pas une pareille tristesse, et ne peut la produire puisqu'elle est destinée à plaire. À son égard, la tristesse consiste dans une plus grande difficulté à découvrir la perfection ou l'ordre, et c'est pourquoi elle ne diffère de la joie que du plus ou moins. » [9]

– si bien qu'au total, le mathématicien, désireux de théoriser la musique, devra accepter de se mettre à l'école des meilleurs musiciens :

« En musique, comme dans tous les beaux-arts en général, il faut se régler d'après l'opinion de ceux qui possèdent à la fois un excellent goût et beaucoup de jugement, et conséquemment ne tenir compte que de l'avis des personnes qui, ayant reçu de la nature une oreille délicate, perçoivent de plus avec justesse tout ce que cet organe leur transmet, et sont capables d'en juger sainement. » [10]

« Il s'agit donc de « consulter les métaphysiciens [= les musiciens] que cette recherche concerne plus particulièrement. » [11]

A. L'habitude désigne la manière dont la musique fait le musicien, plutôt que l'inverse.

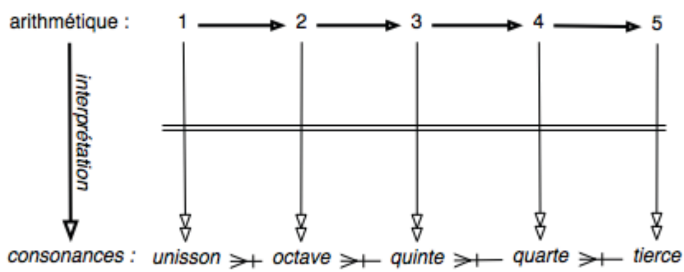
« Nous abandonnons aux musiciens instruits [expertis musicis] le soin de développer ces recherches plus que nous ne l'avons fait et de les rendre applicables dans la pratique. » [12]

Un renversement : l'interprétation devient une formalisation

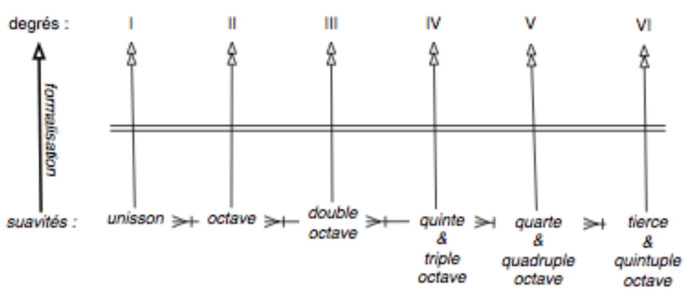
Il ne va donc plus s'agir, comme « pour les Pythagoriciens », d'interpréter des lois mathématiques dans une région particulière (ici musicale) d'une expérience commune mais d'inventer la forme mathématique particulière, apte à rendre compte des lois propres d'un domaine singulier.

Ainsi, on passe avec Euler d'une *interprétation* de l'ordre arithmétique des nombres entiers *dans* la musique (interprétation génératrice d'un ordre pythagoricien des consonances) à une *formalisation* des consonances musicales empiriquement constatées *selon* un ordre mathématique inventé *ad hoc* (les 18 degrés de suavité qu'Euler va constituer) :

Pythagore : *interprétation* de la mathématique *dans* la musique :



Euler : *formalisation* de la musique *dans* la mathématique :



Cette manière de donner forme (mathématique) spécifique à des lois (musicales) autonomes, ce parti pris eulérien de formalisation représente un rapport de type nouveau de la mathématique à la musique qui s'avère d'une portée beaucoup plus générale, rapport intrinsèque à la nouvelle conception des mathématiques qui se joue ici : précisément celle que Christian Houzel a pu, en 1976, nommer « *Euler et l'apparition du formalisme* » [13].

La formalisation eulérienne des lois musicales autonomes a pris un tour particulièrement sophistiqué en matière d'harmonie : c'est la fameuse théorie des degrés de suavité.

3 – La formalisation eulérienne des degrés de suavité

Euler théorise la suavité (ou la *douceur*, ou l'*agrément*) musicale dans son premier écrit : le *Tentamen…* [14]

Le projet d'Euler est ici de donner forme mathématique au plaisir proprement musical, en particulier – on se limitera à ce point – au plaisir harmonique.

Prenons d'abord mesure de la gageure. L'ambition est sans précédent à raison de sa difficulté intrinsèque : il ne s'agit plus seulement de donner forme mathématique aux rapports acoustiques sous-jacents aux différents intervalles de musique – ceci mobilise l'antique voie pythagoricienne, cependant remaniée chez Euler par une problématique des rapports de fréquences et non plus de rapports entre segments du monocorde [15]. Il ne s'agit pas seulement de prendre mathématiquement mesure de la manière spécifique dont la perception auditive décompte ces intervalles – la théorie de la concordance des coups tend alors à y répondre [A]. Il s'agit surtout de formaliser la dimension proprement musicale (et non plus seulement physico-acoustique et physiologico-perceptive) du plaisir pris à ces intervalles !

Euler a bien conscience de devoir formaliser ici une triple stratification :

A. Face à une superposition de différentes régularités, l'oreille décompterait le nombre de frappes simultanées.

> *« Ce n'est pas uniquement dans l'objet* [A] *qu'il faut chercher la cause pour laquelle nous le trouvons agréable ou désagréable [1e niveau]* [B] *; il faut aussi avoir égard aux sens qui en représentent l'image à l'esprit [2e niveau], et surtout au jugement que l'esprit se forme de cette image [3e niveau]. »* [16]

Ce faisant, Euler adopte un tout nouveau rapport à la musique : loin de considérer le plaisir musical comme un plaisir d'ordre arithmétique (fût-il occulte ou inconscient) sur lequel le mathématicien serait alors susceptible d'instruire le musicien, mal éclairé sur les sources de son plaisir, Euler considère au contraire qu'il lui faut désormais partir de ce que le musicien dit de ces lois musicales.

Un renversement

Ce renversement du rapport mathématiques-musique, au principe même de la formalisation, traduit une reconnaissance mathématique de l'émancipation musicale, ce qui n'est pas rien : rappelons ainsi qu'un siècle avant Euler, au moment même où Descartes reconnaissait philosophiquement cette même émancipation des lois musicales, Mersenne plaidait encore la vieille cause (pythagoricienne puis scolastique [C]) d'une tutelle arithmétique sur la musique :

> *« Théorème I. La Musique est une partie des mathématiques. […] Théorème II. La musique dont je traite est subalterne à l'Arithmétique. […] Il s'ensuit qu'un Arithméticien peut apprendre la Musique sans maître et qu'il n'y a nulle science si aisée puisque les meilleures raisons consistent seulement à compter et à comparer ces nombres les uns aux autres. »* [17]

Euler – sa grandeur de mathématicien réside aussi en ce geste – n'a nul besoin de contester l'autonomie durement conquise par la musique pour affirmer la puissance propre de la mathématique : tout au contraire, à ses yeux la mathématique fera d'autant plus la preuve de sa puissance spécifique de pensée qu'elle sera capable de donner forme proprement mathématique aux lois musicales qu'elle rencontre et respecte.

A. C'est nous qui soulignons.

B. C'est nous qui précisons.

C. Rappelons St Thomas d'Aquin faisant l'éloge d'une musique « s'en remettant aux principes qui sont livrés par l'arithmétique » : « Sicut musica credit principia sibi tradita ab arithmetico… » (*Somme théologique*).

Formalisation eulérienne

Comment, pour ce faire, Euler procède-t-il en matière de plaisir harmonique ?

Partons pour cela d'un exemple. Supposons qu'il s'agisse de formaliser la suavité harmonique de l'accord suivant :

1) Formalisation de la structure acoustique de l'accord

Euler va d'abord prendre mathématiquement mesure de la dimension proprement acoustique de cet accord en lui associant une série de nombres (rationnels) qui vont mesurer chaque hauteur sous l'angle de l'intervalle qu'elle forme avec la fondamentale de l'accord (qui n'est pas forcément sa basse).

En l'occurrence, il s'agit ici d'un accord de *sol* majeur (*si-sol*$_1$*-ré-sol*$_2$), en position de sixte (posé sur *si* en sorte que le premier intervalle à partir du bas est une sixte).

On aura donc la suite de nombres suivants {5/8-1-3/2-2} puisque, par rapport au *sol*$_1$ [A], le *si* (basse) est dans un rapport de 5/8 (sixte mineure), le *ré* (alto) de 3/2 (quinte) et le *sol*$_2$ supérieur (soprano) de 2 (octave).

La logique est donc de saisir l'accord *si-sol*$_1$*-ré-sol*$_2$ comme suite d'intervalles centrés sur sa fondamentale *sol*$_1$ (*si-sol*$_1$=5/8, *sol*$_1$*-sol*$_1$=1, *sol*$_1$*-ré*=3/2, *sol*$_1$*-sol*$_2$=2) et non pas comme un empilement d'intervalles (ce qui donnerait successivement de bas en haut : *si-sol*$_1$, *sol*$_1$*-ré*, *ré – sol*$_2$). Euler se conforme ainsi à une lecture tonale – en termes de fonctions harmoniques – plutôt qu'« ensembliste » [B] de l'accord.

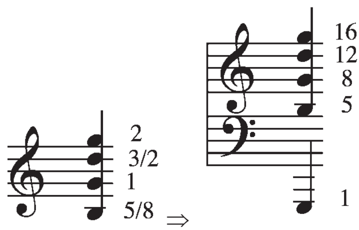
Euler réduit alors cette suite de nombres rationnels en une suite de nombres entiers par multiplication du dénominateur commun (ici 8) en sorte d'obtenir la nouvelle suite {5-8-12-16} qui peut cette fois être comprise

---

A. La fondamentale est ici la deuxième hauteur (à partir du bas) de l'accord, à 392 Hz, juste en dessous du *la* de référence

B. Au sens vulgaire que la *music theory* américaine attache à la *set theory…*

comme mesurant les intervalles à partir d'un *sol* grave (virtuel) constituant la fondamentale implicite [A] de l'accord selon le schéma suivant :



La suite de nombres entiers {5-8-12-16}, ainsi devenue irréductible [B], formalise donc la structure proprement acoustique de notre accord.

2) Formalisation d'un « exposant » synthétique

Euler construit ensuite, sur la base de cette liste de nombres, une représentation synthétique de l'accord qu'il va appeler son « exposant ». Pour cela, l'idée très simple est de prendre le ppcm de la suite précédente en le notant selon sa décomposition (unique) en nombres premiers.

Dans notre exemple, cela donne :

« Exposant » de {5-8-12-16} = $2^4.3.5$ [=240]

L'accord devient ici indexé – « mesuré » – par un nombre entier unique – son « exposant » – qui, dans cette théorie, va résumer sa complexité harmonique telle que l'oreille perceptive sera censée l'appréhender.

3) Formalisation de la suavité proprement dite

Enfin, Euler va édifier le troisième étage de sa formalisation – celui du plaisir proprement musical pris au décompte perceptif d'une suite de rapports acoustiques – en dégageant sa fonction de suavité. C'est là, bien sûr, l'acte le plus important de tout l'édifice.

Sans qu'Euler l'ait explicité comme telle, on peut [18] cependant dégager de ses nombreux tableaux classificatoires la fonction « eulérienne » suivante :

A. Rappelons : la théorie des *partiels* harmoniques ne sera dégagée qu'un siècle plus tard, par Helmholtz (1863).

B. Son pgcd est 1.

suavité $(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots\ p_n^{k_n}) = 1+\sum k_i\,(p_i-1)$ [A]

qui, à un ensemble de hauteurs réductible au nombre $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots\ p_n^{k_n}$ (dans notre exemple $2^4.3.5$) va associer le nombre (désormais noté en chiffres romains) $1+\sum k_i\,(p_i-1)$.

Dans notre exemple, on aura :

suavité $(2^4.3^1.5^1) = 1+[4(2-1)+1(3-1)+1(5-1)]= 11$

Notre accord aura donc une suavité harmonique qu'Euler choisit de noter en chiffres romains : XI.

Remarques

1) Remarquons que la suavité ainsi obtenue est bien synthétique : en particulier, elle n'est pas une simple addition des différents intervalles composant l'accord.

Dans notre exemple :

si-sol₁-ré-sol₂ = sixte mineure (*si* – *sol₁*) + unisson (*sol₁* – *sol₁*) + quinte (*sol₁-ré*) + octave (*sol₁* – *sol₂*)

mais

suavité (*si-sol₁-ré-sol₂*) ≠ suavité (sixte mineure) + suavité (unisson) + suavité (quinte) + suavité (octave)

ou

suavité $(2^4.3.5) \neq$ suavité $(2^3.5)$ + suavité (1) + suavité (2.3) + suavité (2)

car

XI ≠ VIII + I + IV + II

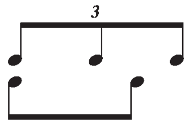
2) La manière d'obtenir cette fonction est chez Euler à la fois simple et compliquée.

Son aspect simple procède de la théorie alors en vogue de la concordance des coups (ou de la congruence des chocs) : son principe consiste à poser que, confrontée à la superposition de différentes séries régulières de « coups » [B], l'oreille décompte le nombre de frappes non simultanées.

A. Où les p_i sont des nombres premiers et les k_i des entiers.

B. Pour Euler, la sensation du son procède d'une série de chocs sur le tympan «*qui reçoit les chocs de l'air et les transmet aux nerfs auditifs. […] Le son n'est donc autre que la*

Par exemple, confrontée à un rapport 3/2 qu'on noterait musicalement ainsi :

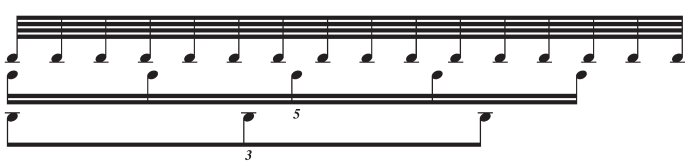


l'oreille va compter quatre frappes différentes puisque la première d'entre elles est partagée par les deux séries de coups. Soit, en décomptant d'abord le coup commun et en l'ôtant ensuite à chaque série distincte superposée, la formule suivante :

suavité(2.3) = 1 +(2-1)+(3-1).

Il semble qu'à partir de là Euler ait dégagé sa formule générale de la suavité par récurrence (selon l'idée générale que le plaisir musical pris à auditionner un accord serait inversement proportionnel au nombre des chocs perceptifs différents que cet accord génère).

Mais, à bien y regarder, la formalisation retenue par Euler s'écarte significativement d'un simple décompte perceptif (ainsi théorisé comme « coïncidence des coups »), ce qui peut se voir au fait que notre accord-test (2^4.3.5) a une suavité harmonique valant XI lors même qu'il génère 22 coups non simultanés :



Cet écart peut s'exemplifier ainsi :

– La suavité de {3-4} s'évalue comme suavité de (2^2.3) et vaut donc V alors que la suavité de {2-5} s'évalue comme suavité de (2.5) et vaut donc VI : or, dans les deux cas, le nombre de coups non simultanés est le même : 6.

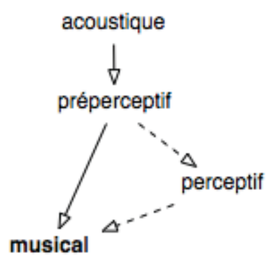
perception de chocs successifs ». (*Tentamen*)

– À l'inverse, les suavités de $(2^2.3^2)$ et (3.5) valent toutes deux VII alors que leurs rapports {4-9} et {3-5} génèrent respectivement 12 et 7 coups non simultanés.

Cette disjonction tient mathématiquement à la différence entre $\Sigma(p_i k_i\text{-}1)$ et $\Sigma k_i(p_i\text{-}1)$, et théoriquement à la différence entre une formalisation de la perception (décompte des coups non simultanés) et la fonction eulérienne de la suavité puisqu'un strict décompte des coups non simultanés conduirait à la formule $1+\Sigma(p_i^{k_i}\text{-}1)$. [A]

Ce point exhausse donc la liberté mathématique avec laquelle Euler traite son « objet » : comme le remarque Yves Hellegouarch, « *beaucoup d'autres fonctions auraient pu être proposées* » [19]. Il est significatif que celle retenue par Euler assume une disjonction du *musical* par rapport au pur et simple *perceptif* : Euler formalise ainsi – implicitement – que le jugement musical porté sur un accord est en autonomie relative par rapport à une simple évaluation perceptive.

En ce point, on pourrait soutenir qu'Euler, en choisissant de formaliser son « exposant » non selon des nombres premiers entre eux (4 et 9 par exemple) mais selon leur décomposition en puissances de nombres premiers (2^2 et 3^2), préstructure la perception (en vue de sa saisie musicale ultérieure) selon le schème hiérarchique suivant :



avec la grille de lecture suivante :

Niveau	Formalisation
acoustique	{5-8-12-16}
pré-perceptif	$2^4.3.5$ (plutôt que 3.5.8)
perceptif (ici implicite et court-circuité)	$1+\Sigma(p_i^{k_i} - 1)$
musical	$1+\Sigma k_i(p_i\text{-}1)$

A. Comme dans ℕ, on a $k.p \leq p^k$, la suavité sera toujours inférieure ou égale au nombre de coups non simultanés perçus.

Face à cette contribution propre d'Euler à la formalisation de l'autonomie musicale, non seulement par rapport à l'acoustique mais, plus encore, par rapport à ce qu'on appellera, plus tard, la psycho-physiologie de la perception, le musicien pensif ne peut que rendre grâce à Euler d'avoir *mathématiquement* inscrit, au cœur même de sa formalisation, le germe de l'écart (musicalement décisif) entre écoute musicale et perception auditive.

En résumé

Au total, Euler nous propose une mesure mathématique de l'intensité du plaisir musical pris à goûter une complexité perceptive enracinée dans une structure acoustique. Cette formalisation stratifiée peut se récapituler selon le tableau suivant :

Pour un même « objet » situé au niveau	**sa mesure est**	**sa notation se fait selon**	
de la « *cause* »	mesure de sa structure acoustique élémentaire	une suite de nombres entiers	{5-8-12-16}
de « l'*image* »	mesure synthétique de son degré de complexité pour le sens auditif	un nombre unique (présenté selon sa décomposition en nombres premiers)	$2^4.3.5$
du « *jugement* »	mesure de son degré de suavité musicale	un numéro d'ordre (noté en chiffres romains)	XI

Une fois cette fonction de suavité élaborée sur de simples intervalles puis sur des accords plus complexes, Euler indique que cette fonction vaudrait tout autant pour des suites d'accords ce qui l'autorise, chemin faisant, à soutenir qu'elle permettrait de prendre mesure de la suavité d'une pièce de musique dans son intégralité – où Euler mobilise la puissance de systématisation que délivre toute formalisation…

4 – Évaluations de cette théorie eulérienne du plaisir musical

Comment évaluer une telle formalisation ?

C'est en ce point que mathématiciens et musiciens vont discuter – et se disputer – s'il est vrai que l'évaluation musicienne de cette formalisation va différer de son évaluation proprement mathématicienne.

Évaluation musicienne

Pour le musicien, le terrain d'épreuve d'une telle formalisation va forcément être la musique telle qu'il la pratique et la connaît.

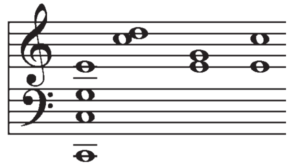
Son raisonnement sera donc le suivant : l'ordre ainsi mathématiquement produit concorde-t-il avec l'ordre musical des consonances-dissonances et des complexités harmoniques tel qu'un musicien a l'habitude de le pratiquer [A] ?

D'où, venant du musicien, une série d'objections plutôt que d'approbations : le musicien ne voyant guère, au premier abord, quels avantages tirer de cette formalisation dans la pratique de son art, préférera aussitôt objecter :

– pourquoi donner à la quarte une plus grande suavité harmonique (degré V) qu'à la tierce (degré VII) [B] quand pour le musicien, comme on l'a vu, la tierce a plus de vertu consonante ?
– pourquoi constituer des classes d'équivalences de suavité harmonique où se retrouvent des harmonies fort disparates aux yeux des musiciens ? Par exemple pourquoi donner la même suavité (VIII) à la série des accords suivants qui, pour un musicien, apparaissent fort différents, à commencer par leur densité de notes :

A. Rappelons qu'Euler tenait l'habitude spécifiquement musicienne en estime, la considérant comme le produit heureux de cette discipline qui permet à la musique de façonner le corps et les sens du musicien à l'exercice de ses lois propres.

B. La quarte vaut 3/4 et sa *suavité* ($2^2.3$) vaut V. La tierce (majeure) vaut 4/5 et sa *suavité* ($2^2.5$) vaut donc VII.



suavité (2.3.5) = *suavité* ($2^3.3^2$) = *suavité* (2.3.5) = *suavité* ($2^3.5$) = VIII

soit, successivement :

– un accord de *do* majeur, dont la registration des quatre hauteurs est bien équilibrée : {1-2-3-5} ;
– une simple seconde majeure (9/8), isolée, et nettement dissonante, insuffisante à caractériser par elle-même quelque fonction tonale que ce soit ;
– une tierce mineure (6/5) et une sixte mineure (8/5) sonnant avec douceur et suggérant différentes fonctions tonales.

Le musicien, ne voyant guère quel parti musical tirer d'une formalisation pour lui aussi inattendue – mettre son plaisir en équation ! –, ne s'y rapportera donc spontanément que sous l'angle des objections.

Comment Euler répondrait-il à cela ? Bien sûr, il nous faut ici conjecturer.

Une première manière de répondre consisterait à dire : cette formalisation ne prétend pas exactement « mesurer » la suavité, mais seulement quantifier une de ses composantes, indiquer des contours et dessiner des limites [20], comme le suggère par exemple cette remarque d'Euler :

« À l'aide de notre méthode, on pourra assigner jusqu'à un certain point les limites qui séparent ces deux classes… » [21]

Il est vrai que :

– les degrés de suavité sont utilisés par Euler comme ordinaux plutôt que cardinaux (la suavité d'ordre XIV n'est pas deux fois moindre que celle d'ordre VII [A]) ;
– Euler argumente, face à Rameau, que l'évaluation exacte de la suavité de la quarte dépend du contexte :

« J'y ai exposé sur la quarte à peu près le même sentiment que vous m'avez fait l'honneur de me marquer, ayant dit que ce n'est pas la quarte elle-même,

A. Et il ne s'agit pas davantage ici d'une mesure d'ordre logarithmique.

> *mais d'autres tons qui l'accompagnent nécessairement dans nos systèmes usités de musique, qui la rendaient dissonante, ces sons y étant ajoutés ou actuellement ou sous-entendus.* » [A]

Mais ceci n'éponge nullement le différend musicien/mathématicien car si l'on peut soutenir en effet qu'à proprement parler, Euler ne formalise pas une mesure des consonances mais seulement leur ordre, il n'empêche que l'ordre que sa formalisation établit s'ajuste mal à celui mis en pratique par les musiciens.

> On pourrait, en ce point, en conclure qu'Euler ne prend pas au sérieux l'autonomie musicale des lois harmoniques puisqu'il ne formalise pas tant ce que font les musiciens (à ce titre, il ne semble pas avoir pris mesure du passage de la tierce devant la quarte dans l'ordre des consonances) que ce qu'il croit qu'ils font.

> Le point est simplement qu'ici comme toujours, les mathématiciens ne formalisent guère la musique telle qu'elle se donne dans les morceaux de musique mais formalisent une théorie préexistante de la musique. Euler, ici, formalise une théorie trop générique pour être difficilement identifiable, ce qui nous interdit de remonter plus en détail à ses sources théoriques…

Comprendre la logique de ce différend implique alors de bien voir qu'Euler évalue sa formalisation selon des principes fort différents de ceux à l'œuvre dans l'évaluation musicienne qui vient d'être esquissée.

Évaluation mathématicienne

L'idée importante est que, pour le mathématicien, le véritable terrain d'épreuve d'une telle formalisation sera moins la musique que la mathématique. Ce qui peut également se dire ainsi : pour Euler, la cible d'une théorie mathématique de la musique est essentiellement… la mathématique, non la musique.

Euler finalement évalue sa théorie à bien d'autres titres que son exactitude en matière de pratiques musicales. Si Euler a fait l'effort du *Tentamen*, ce n'est pas en effet pour « traduire » les traités musicaux d'harmonie et

A. À dire vrai, le problème proprement musical n'est pas tant d'expliquer en quoi la quarte peut devenir dissonante que bien plutôt l'inverse : à quelles conditions la quarte peut-elle être acceptée comme consonance, n'appelant donc pas de résolution ? Une de ces conditions musicales est par exemple que cette quarte n'apparaisse pas à la base de l'accord (voir les résolutions nécessaires des accords dits « de quarte et sixte »).

contrepoint en formules mathématiques, mieux aptes – parce que plus compactes, plus unifiées, plus systématiques – que les règles empiriques des musiciens à les instruire des lois de son art ; ce n'est pas essentiellement pour mettre les mathématiques de son temps au service de la musique.

Un intérêt pour les musiciens…

Certes Euler tient que son travail théorique est susceptible d'intéresser le musicien, en lui donnant envie d'aller prospecter plus avant.

> *« Nous abandonnons aux musiciens instruits [expertis musicis] le soin de développer ces recherches plus que nous ne l'avons fait et de les rendre applicables dans la pratique ».* [22]

Précisément, il s'agit pour lui « *de montrer de quelle extension la musique est encore susceptible* » [23]. Estimant ainsi en 1731 [24] que les musiciens travaillent jusqu'ici sur des accords peu complexes car n'utilisant que les nombres 2, 3 et 5, il examine la possibilité de tirer profit du nombre 7… pour finalement rejeter cette éventualité :

> *« Jusqu'à nos jours on n'a admis dans la musique que des accords dont les exposants sont comptés des seuls nombres 2, 3 et 5 […] ce qui a fait dire autrefois au grand Leibniz que dans la musique on ne saurait compter au-delà de [5]. »*

> *« Outre ces trois nombres, il serait assez difficile d'en introduire un autre dans la musique, savoir le nombre 7, parce que les accords dans lesquels entrerait celui-ci auraient un effet trop dur et contraire à l'harmonie. »*

Trente ans plus tard (dans ses ouvrages de 1764 [25]), prenant enfin mesure que les musiciens utilisent bien ce nombre dans leur « septième de dominante », Euler leur en rend acte [A] :

> *« Le grand Leibniz a déjà remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5. […] Mais si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition on compte déjà jusqu'à 7 et que l'oreille y est déjà accoutumée. C'est un nouveau genre de musique qu'on a commencé à mettre en usage et qui a été inconnu aux anciens. »* [26]

et réitère ce diagnostic en 1773 :

> *« L'accord de septième a été ajouté par les musiciens modernes. »* [27]

A. Ipso facto, ceci suggère qu'il faudrait que les musiciens aillent désormais voir du côté du nombre 11, ce qui se révélerait une tout autre paire de manches…

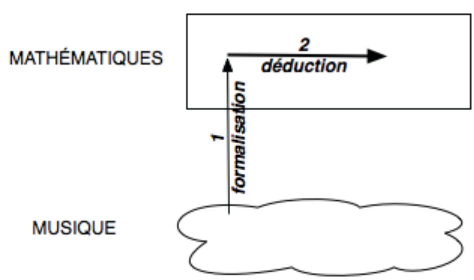
Ainsi en 1731 Euler imagine bien mathématiquement une extension musicale, mais son imagination proprement musicienne l'en dissuade aussitôt, au moment même, pourtant, où, à l'inverse, l'imagination musicale des musiciens leur fait précisément explorer cette même extension [A], à l'écart bien sûr chez eux de toute imagination d'ordre proprement mathématique…

… mais avant tout pour les mathématiciens

Tout ceci indique bien que l'argument d'Euler (*montrer de quelle extension la musique est encore susceptible*) ne joue qu'un rôle tout à fait secondaire dans la justification de son travail mathématique ; l'enjeu ultime de ce travail de formalisation est bien pour Euler d'ordre mathématique ; ce qui peut également se dire ainsi : pour Euler, l'intérêt de montrer de quelle extension la musique est encore susceptible est surtout de pointer ainsi l'aptitude de la mathématique… à dégager ce genre d'extension, c'est-à-dire à faire rayonner tous azimuts sa propre puissance de pensée.

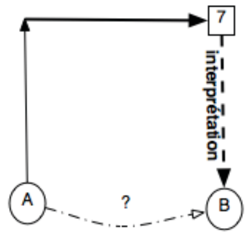
D'où, au total, l'idée suivante : la théorie eulérienne de la musique, comme à dire vrai toute théorie mathématique de la musique, constitue une flèche qui a la musique pour source et la mathématique pour cible.

Ceci peut être diagrammatisé de la manière suivante : la théorie eulérienne procède par enchaînement d'une formalisation (musique→mathématiques) et d'une déduction intra-mathématique qu'on peut représenter ainsi :

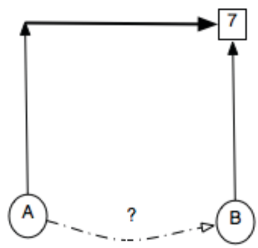


Lorsqu'Euler suggère alors au musicien d'examiner s'il n'y aurait pas parti musical à tirer d'un nouveau nombre premier (tel 7, ou, pourquoi pas, 11), il n'a pas en tête le schéma suivant :

A. Rôle décisif de la septième de dominante (V_7) dans les harmonies tonales…



qui soutendrait la question suivante : d*e nouveaux accords B pouvant découler de l'interprétation (dans l'espace musical) des nouvelles formules mathématiques déduites grâce au nouveau nombre premier 7, comment le musicien évalue-t-il le rapport de ces nouvelles entités B aux accords initiaux A ?*, mais bien plutôt ce schème-ci :



qui diagrammatise la question suivante : *le musicien n'aurait-il pas à examiner s'il n'y a pas une extension de sa pratique harmonique telle qu'elle dégage de nouveaux accords B dont la formalisation requerrait alors le nouveau nombre premier 7 (ou 11) ?*

Bref, quand Euler suggère au musicien que le nombre 7 pourrait l'intéresser, il ne revient pas sur l'autonomie reconnue à la musique, il ne prétend pas utiliser sa formalisation pour réinstaller, ne serait-ce qu'en un point, la musique sous tutelle de la mathématique ; il ne cherche pas plus à « appliquer » sa théorie mathématique à la musique. Il reste en tous points fidèle à sa nouvelle subjectivité formalisatrice : il mise sur le fait que ce que la mathématique lui permet de découvrir pour son propre compte de mathématicien doit avoir une correspondance dans le champ musical, à charge alors au musicien de savoir tirer parti, à sa manière propre, de cette suggestion venue des mathématiques :

« Nous abandonnons aux musiciens instruits le soin de développer ces recherches… »

5 – Des effets dans la compréhension de la mathématique

Des effets du côté de la musique…

Cette manière nouvelle de théoriser mathématiquement la musique a des effets immédiats du côté de la musique : mentionnons par exemple qu'elle conduit à une échelle ordonnée [A] des suavités dans laquelle il n'y a plus de différence de nature entre consonances et dissonances (ce qui, pour l'époque, n'était pas banal) [B].

« Le mot de dissonance est peu propre à exprimer l'idée qu'on y attache. Cette idée n'est rien moins qu'opposée à celle qu'on attache au mot de consonance, comme l'étymologie semble l'indiquer. […] Les dissonances ne diffèrent des consonances proprement dites que parce qu'elles sont moins simples ou plus compliquées. » [28]

et surtout des effets du côté des mathématiques…

Mais cette nouvelle manière d'aborder ce que théoriser veut mathématiquement dire va surtout avoir des effets du côté de l'activité mathématique elle-même.

On l'a déjà vu : il y a d'abord que s'invente ici la formalisation mathématique comme telle.

Mais un autre trait mérite d'être exhaussé : la musique, servant de terrain d'épreuve à la nouvelle puissance formalisatrice des mathématiques, va mobiliser les nouvelles disciplines mathématiques alors naissantes et, par là, favoriser leur intégration dans une mathématique unifiée plutôt qu'écartelée entre différentes directions.

Euler, en effet, ne limite pas sa théorie mathématique de la musique à la formalisation des degrés de suavité harmonique, et, pour étendre sa prise mathématique sur de nouvelles dimensions musicales, il fera toute sa vie

---

A. On l'a dit : les degrés eulériens de suavité sont ordinaux plutôt que cardinaux…

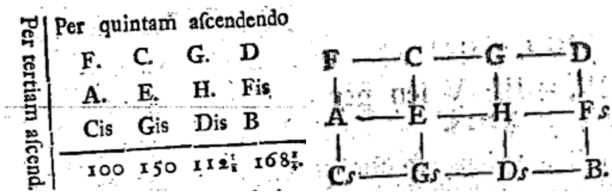
B. Il faudra attendre un siècle pour, qu'avec Wagner puis Schoenberg, cette distinction musicale des consonances et dissonances se sature puis se dissolve…

feu mathématique de tout bois en diversifiant les domaines mathématiques mobilisés à cette fin.

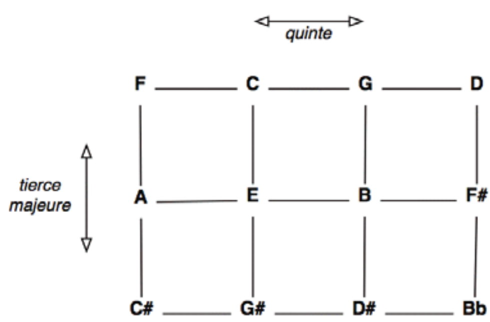
Donnons-en ici deux exemples, qui contrastent fortement avec le précédent.

6 – Le « miroir musical »

Euler a inventé [29] ce qu'il appelle le « miroir musical », soit un réseau harmonique révélant la structure géométrique sous-jacente aux enchaînements (verticaux) de tierces et (horizontaux) de quintes propres à la tonalité :



soit, en notation moderne (anglo-saxonne) :

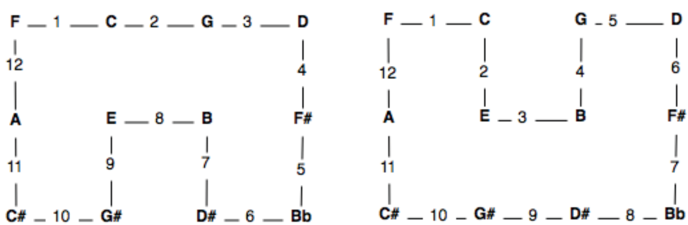


On passe ainsi d'une représentation linéaire du total chromatique (selon le classique cycle des quintes : F-C-G-D-A-E-B-F♯ -C♯ -G♯ -D♯ -B♭) à une représentation plane qui relève une géométrie tonale combinant les enchaînements harmoniques non seulement à la quinte mais également à la tierce. [A]

Ce « miroir » aussitôt posé, Euler entreprend d'en explorer les propriétés combinatoires [B] mais aussi de l'interroger comme graphe, ce qui va l'amener à résoudre une question qu'il déclare lui-même « très curieuse », apparentée au problème classique des sept ponts de Königsberg (on sait que c'est Euler qui l'a résolu en 1736) :

> « *Dans quel ordre faut-il parcourir les douze sons de l'échelle musicale pour qu'en passant toujours par des intervalles de quinte ou de tierce majeure, et en ne faisant entendre chaque son qu'une seule fois, on revienne à celui d'où l'on est parti ?* »

Et Euler de répondre qu'« *une telle progression peut se faire seulement de deux manières* » qu'on figurera ainsi :



ou

Il est frappant qu'Euler offre ainsi à l'attention musicale deux séries dodécaphoniques inhabituelles, telle la première

Le regard qu'Euler porte sur des situations musicales convenues produit ainsi des objets musicaux originaux et décalés.

A. La destinée musicologique de ce miroir – qui deviendra un plan (« le plan d'Euler ») quand le tempérament égal autorisera son recollement cristallin – sera très vaste, à commencer par les travaux du musicologue allemand Hugo Riemann (1849-1919).

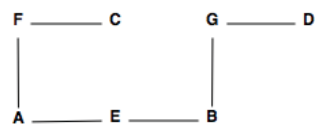
B. Combien, par exemple, y a-t-il de manières différentes de passer de F à B ? Réponse d'Euler : 10! (factorielle 10)

7 – Comment phraser une gamme ?

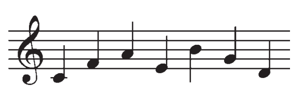
Voyons également ce qu'il indique, dans le même ouvrage [30], concernant la gamme à faire chanter par les élèves musiciens :

> *« La méthode qu'on suit ordinairement pour enseigner la musique aux enfants est très vicieuse en ce qu'elle s'éloigne beaucoup des principes de l'harmonie. Comment peut-on exiger que les élèves apprennent à entonner les son de ut, ré, mi, fa, sol, la si ? Dans cette gamme il y a un ton majeur de ut à ré, un ton mineur de ré à mi, un demi-ton majeur de mi à fa, etc. intervalles que les musiciens les plus exercés ne sont pas capables de chanter juste, à moins qu'ils ne s'aident d'un instrument ou qu'ils ne les décomposent en intervalles simples. Dès le commencement il faut donc exercer les élèves avec le plus grand soin à former l'octave, la quinte et la tierce majeure ; ce n'est qu'ainsi qu'ils acquerront une bonne oreille et qu'ils s'habitueront de plus en plus à bien apprécier l'agrément qui accompagne la perception de ces consonances. »*

En suivant sa méthode, on comprend qu'il conseillerait de parcourir son miroir ainsi



en sorte de faire chanter par les écoliers la gamme suivante :



soit une nouvelle originalité, éclairant d'une manière inattendue un terrain musical pourtant bien connu…

8 – Les puissances singulières de la formalisation

Par-delà cet engendrement mathématique de curiosités musicales, la logique formalisante mise en œuvre par Euler est grosse de nouvelles puissances.

L'unification du domaine examiné

Cette voie formalisante assure d'abord l'unification d'un domaine :

> *« Nous avons ramené l'appréciation de toutes ces choses à la formation d'exposants numériques qui représentent la force et la nature tant des accords pris isolément que de deux ou plusieurs qui se succèdent. »* [31]

Ainsi la même formalisation par exposants, prévalant successivement pour des intervalles, des accords, des séries d'accords, un morceau de musique tout entier (et même implicitement pour le rythme), autorise une théorisation unifiée du phénomène musical.

L'extension des pratiques formalisées

De même, cette orientation va suggérer une nouvelle extension des lois musicales formalisées et ainsi éclairées par la mathématique sous un jour nouveau. Tel est le cas, comme on l'a vu, pour les intervalles et accords composés dont Euler prévoit l'extension dans le cadre de ce qu'il appelle, en 1764, « la musique moderne » :

> *« Les bornes de la musique moderne sont beaucoup plus étendues. »* [32]

La systématisation des recensements

La formalisation stimule aussi une exploration systématique du champ examiné. Dans le cas d'Euler, cela concerne son classement systématisé des accords (qui plus est, selon l'originalité d'un point de vue perceptif), des genres musicaux [A], des parcours, etc.

L'unification des mathématiques

Enfin la diversité des formalisations mathématiques mises en œuvre par Euler a une contrepartie mathématique essentielle : elle tend à assurer l'unité mathématique des sous-disciplines mobilisées dans l'activité formalisatrice.

À faire ainsi une liste des différents notions mathématiques mobilisées par Euler pour formaliser la musique, on ne peut en effet qu'être frappé de leur diversité. En sus de ce que nous avons déjà vu,

---

A. Des ensembles de fréquences, mixtes de gammes et de tempéraments…

– il y a la série des n+1/n [A], au principe des intervalles musicaux, et dont par ailleurs Euler a développé le calcul des limites ;
– il y a l'introduction des logarithmes, pour la juste quantification des intervalles musicaux (Euler conseille bien sûr d'utiliser ici les logarithmes à base 2) ;
– il y a l'usage des fractions continues pour évaluer les rapports de logarithmes [33] :

$$\text{mutatur in hanc } 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}} \quad \text{ad } 1$$

– il y a également – on l'a pressenti – des problèmes d'ordre combinatoire…

À tous ces titres, on peut entendre sa manière diversifiée de théoriser mathématiquement la musique comme une façon d'avérer en acte l'unité des mathématiques dans un contexte nouveau, marqué par la dispersion de nouvelles disciplines.

9 – Le moment Euler/Rameau de 1752

En 1752, les rapports Euler-Rameau ont pris la forme d'un échange épistolaire direct. Restituons le contenu de cet échange, peu connu.

I. Lettre d'Euler

C'est Euler qui prend l'initiative d'écrire de Berlin « à Monsieur Rameau, très excellent musicien à Paris » le 13 septembre 1752.

> *Il s'en faut bien que j'aie contesté votre principe de l'harmonie, que je le regarde plutôt comme l'unique base de toute la musique, et comme ce principe se réduit à la simplicité des rapports, je prétends que mon* Essai d'une Théorie de la Musique *est uniquement fondé sur ce même principe, et que les exposants auxquels j'ai réduit mes recherches en sont une suite très naturelle. Je conviens aussi que plusieurs sons d'instruments renferment actuellement leurs octaves 12^e^, 15^e^, 17^e^, et quoiqu'il me semble que ce mélange ne soit général, et qu'il y ait aussi des sons purs, je soutiens néanmoins tout comme vous, Monsieur, que les rapports 1:2, 1:3, 1:4, 1:5 rendent les plus simples consonances ;*

A. Les *rationes superparticulares* dont il sera question plus loin dans sa lettre à Rameau *et je tombe aussi d'accord que la diversité d'octaves ne change pas la nature d'une consonance, quoiqu'elle en change l'agrément, et je vois que vous êtes du même sentiment. Or c'est aussi ce même principe que Pythagore a découvert, et il me semble que les Aristoxéniens n'ont jamais nié ce principe même, leur sentiment était seulement qu'on ne devait pas chercher la cause des consonances dans les nombres et qu'il fallait se rapporter uniquement au jugement des oreilles. Cependant les Pythagoriciens se sont aussi bientôt égarés dans leurs nombres, et y ont mêlé de leur caprice, comme lorsqu'ils ont soutenu que ce n'étaient que les rationes superparticulares* [A] *qui fournissaient des consonances; principe destitué de tout fondement, et à cet égard les Aristoxéniens ont bien eu raison de se moquer de leur théorie prétendue. Ainsi lorsqu'on trouve défectueuse tant cette théorie que celle des autres musiciens théorétiques qui les ont suivis, il me semble qu'on n'en doit pas accuser leurs premiers principes, mais plutôt les conséquences qu'ils en ont tirées trop témérairement. Or je me flatte (d') avoir évité ce défaut dans mon ouvrage, où toutes les conséquences me paraissent étroitement liées avec les principes mêmes. J'y ai exposé sur la quarte à peu près le même sentiment que vous m'avez fait l'honneur de me marquer, ayant dit que ce n'est pas la quarte elle-même, mais d'autres tons qui l'accompagnent nécessairement dans nos systèmes usités de musique, qui la rendaient dissonante, ces sons y étant ajoutés ou actuellement ou sous-entendus. Quand l'occasion se présentera de montrer votre lettre à S. M. je ne manquerai pas de le faire, ayant l'honneur d'être avec la plus parfaite considération, votre très humble & très obéissant serviteur, L. Euler.* »

Visiblement, Euler a lu Rameau – il n'est pas sûr que l'inverse ait été également vrai.

Euler plaide la compatibilité entre leurs deux théories, précisant même que sa propre théorie se conforme au principe ramiste.

Ce faisant, Euler exhausse que sa manière mathématique de procéder configure un rapport mathématiciens/musiciens désencombré de l'antique opposition Pythagoriciens/Aristoxéniens.

Suite à quoi Euler engage le débat sur ce qui, à ses yeux, constitue les points à discuter entre eux, dans ce nouveau contexte (intellectuellement dégagé de l'ancienne opposition entre tutelle arithmétique et émancipation musicale) : le statut respectif des quartes et des octaves dans leurs deux théories.

A. Les rapports *superpartiels* (également dits «épimores») sont du type (n+1)/n soit (1+1/n). Le point en débat est le suivant : si l'octave (2/1), la quinte (3/2) et la quarte (4/3) correspondent bien à de tels rapports «superpartiels», qu'en est-il alors de la quinte et de la quarte octaviées (3/1 et 8/3) ?

Euler mène ce débat de l'intérieur même de ses catégories – la tripartition relevée précédemment entre *diversité* arithmético-physique, *nature* perceptive et *agrément* musical – en soutenant :

– d'une part qu'il y a selon lui identité de vue sur la question de l'évaluation des octaves [A] ; ce point va pour Rameau constituer le véritable litige : là où Euler soutient que, si les octaviations ne changent pas la « nature » d'une consonance, on ne saurait pour autant confondre les différents octaves et l'unisson car ceux-là changent l'agrément harmonique, Rameau, comme on la voir, va plaider l'indistinction harmonique des octaves par rapport à l'unisson ;

– d'autre part qu'en matière de quarte – celle-là même qui, comme l'on sait, concentre historiquement l'écart entre ordre musical et ordre arithmétique des consonances/dissonances –, leur écart est à ses yeux résorbable puisqu'Euler soutient que la dissonance de la quarte doit s'évaluer… selon son contexte [B].

II. Réponse de Rameau

À quoi Rameau va répondre deux mois plus tard, choisissant en décembre 1752 de rendre publique [C] une partie de cette réponse. [34]

En substance, Rameau répond à Euler sur trois points.

Sur Pythagore

Rameau n'accorde pas à Euler la distinction Pythagore (bon principe) / Pythagoriciens (mauvaises conséquences) :

> *« Il y a d'abord une vérité très constante, dit M. Rameau, savoir que nous avons tous été trompés par l'identité des octaves, depuis Pythagore jusqu'à ce jour, ayant toujours pris pour premiers intervalles ceux qui n'en sont que les octaves : de sorte que le géomètre n'a pu que s'égarer dans les conséquences qu'il en a voulu tirer, puisqu'il y avait erreur dans le principe. »*

Pour lui le principe de Pythagore est vicié à la base car il repose sur l'arithmétique plutôt que sur la Nature (physique), ce qui conduit Pythagore à une hiérarchie des consonances toute numérique, inapte à correctement évaluer les rapports sonores entre octave, quinte et quarte :

a. « *Je tombe aussi d'accord que la diversité d'octaves ne change pas…* »

b. « *Ce n'est pas la quarte elle-même, mais d'autres tons qui l'accompagnent…* »

c. À ma connaissance, une lettre éventuelle directe de Rameau à Euler n'est pas identifiée.

« Tel est l'empire de l'oreille, qui, conséquemment à nos facultés, aux bornes de nos sens, a toujours tenu dans l'esclavage les plus grands philosophes, les plus grands géomètres et les plus grands musiciens de pratique [...] et il n'y a que cet empire qui puisse rendre excusable l'erreur où l'on est tombé dans l'établissement des principes de la musique. Pythagore, dit-on, tira la quinte et la quarte de la division de l'octave, premier produit, et ensuite le ton majeur de la différence entre cette quinte et cette quarte, produit du produit : ce qui fut généralement adopté. Sans entrer dans le détail de ce qui se passa parmi les Anciens au sujet de ces produits, il suffit de savoir que de tous les systèmes qu'ils imaginèrent en conséquence pour servir de principe à la musique, ils en établirent un qu'ils appelèrent, par prédilection, parfait et naturel, celui-là même qui nous est également suggéré à tous, qu'on appelle aussi diatonique, et que nous reconnaissons sous le titre de gamme ou d'échelle, ut ré mi fa sol la si ut; où l'on voit que ce système, tout composé de tons et de demi-tons d'un son ou d'une note à l'autre, n'est fondé que sur des produits d'un premier produit. »

Sur Aristoxène

Pas plus qu'il n'entérine la critique d'Euler aux Pythagoriciens, Rameau n'entérine l'éloge eulérien d'Aristoxéniens que pour sa part il n'apprécie guère.

Rameau réitère ici sa critique adressée à Aristoxène, celle qui – on l'a vu – fut au fondement de sa nouvelle manière cartésienne de procéder :

« Aussi sourd que les Anciens à la voix de la nature, quoique d'accord avec Aristoxène, il eût bien recommandé de l'écouter : cet auteur s'imagine, comme eux, pouvoir combiner à son gré ce même ordre qu'elle vient de lui dicter, et va jusqu'à en former douze modes sans ordre déterminé et sans bornes, à l'exception de celui qui lui a d'abord été inspiré : erreur qui s'est tellement invétérée qu'elle subsiste encore en partie dans le chant de l'église. À la fin l'oreille a pris le dessus, et le musicien rebuté des préceptes que contrariaient à chaque instant les effets qu'il éprouvait ne s'en est presque plus rapporté qu'à son expérience : il a heureusement reconnu par ce seul secours, qu'il ne pouvait y avoir que deux modes, le majeur et le mineur, conséquemment à l'ordre que nous en prescrit le principe tiré de la résonance du corps sonore : et l'on peut dire que sans l'erreur où il a été jusqu'à ces derniers temps, avec tous nos législateurs en musique, savoir que l'octave diatonique d'un mode devait nécessairement appartenir au même générateur, il en aurait pu tirer, plutôt qu'il n'a fait, la connaissance du rapport des modes, dont dépendent les plus grandes beautés en musique, et il aurait mis le comble par là aux grands progrès qu'il a fait dans son art. Le jugement et l'oreille auraient dû concourir également de tout temps à cette connaissance; cependant ce n'est que depuis peu qu'on commence à s'en apercevoir. »

Sur le rapport unisson-octave

Rameau entreprend de minorer la portée musicale de la différence unisson-octave qui se trouve au principe de l'approche arithmétique pythagoricienne. Pour Rameau, la différence unisson/octave n'est pas de même importance musicale que la différence unisson-octave/quinte-quarte-… (soit la différence 1-2/3-4-…) :

> *« Pour donner d'abord une idée juste de l'octave, M. Rameau, après avoir fait remarquer qu'elle ne se distingue jamais dans aucun corps sonore pincé, frappé, ou ému par le vent pendant que la 12ᵉ et la 17ᵉ s'y distinguent sensiblement, nous fait apercevoir de plus qu'elle ne change point la nature du son, qu'elle le fortifie seulement, de même que l'unisson, mais en le rendant plus brillant, comme on peut l'éprouver sur l'orgue et le clavecin, où l'on aura soin d'opposer au moins un unisson à l'octave, pour y mieux imiter la nature. […] Bien qu'on ne distingue point ces octaves, elles n'en résonnent pas moins […] et il n'y a pas à douter que si on ne les distingue pas, c'est qu'elles se confondent entre elles, aussi bien qu'avec leur son fondamental, qui est celui du corps total, comme on peut l'éprouver encore sur l'orgue et sur le clavecin : de sorte qu'on en doit être nécessairement affecté, de même que sur ces instruments, mais par un sentiment occulte, qui n'a pas encore permis d'en développer la cause. De ce sentiment occulte nous est venu naturellement celui de la représentation d'un son dans ses octaves, en un mot, celui de leur identité : sentiment qui seul a servi de guide aux musiciens de tous les temps, tant en théorie qu'en pratique, comme M. Rameau le prouve dans la suite. Il reste encore un doute à lever, savoir, que l'identité des octaves ne peut empêcher qu'elles n'apportent quelques différences dans l'harmonie et dans la mélodie. M. Rameau en convient; mais c'est, dit-il, une différence qui n'altère nullement le fond, ni dans sa nature, ni dans son genre : elle consiste seulement dans les différentes modifications d'un même tout différemment combiné, où les sons ne peuvent changer d'ordre sans le secours de leurs octaves. »*

Rameau argumente :

– D'un côté, si l'octave change bien l'agrément musical, ce n'est pas au titre d'une hauteur perceptible mais selon une fonction qu'on pourrait dire, en termes modernes, de *timbre* – « *les octaves sont pour ainsi dire muets* », « *on en est affecté par un sentiment occulte* » qui « *fortifie* » le son et « *le rend plus brillant* » –, mais aussi de mélodie (profils) ou d'équilibre dans les accords (renversements) ; au total, Rameau plaide que les musiciens travaillent sur des classes d'équivalence de hauteurs. [A]

A. On sait que d'Alembert règlera le problème de l'octave en posant explicitement, dans ses Éléments (1752) une équivalence des octaves (voir sa *troisième expérience* dans I. 1, p. 16-18).

– D'un autre côté, les autres intervalles – qui pour Rameau sont musicalement les véritables intervalles – sont perceptivement distinguables et doivent donc être classés selon un autre principe que numérique (principe qui, pour Rameau est le principe naturel de la résonance du corps sonore…).

Et Rameau de conclure – avec cette arrogance vis-à-vis des mathématiciens qui ne cesse de croître à partir de 1750 – qu'il ne veut pas s'encombrer d'une fausse querelle sur le terme « identité » (au cœur pourtant du différend sur la nature exacte du rapport unisson-octave) :

> « *Si, après tout ce qui vient de paraître en faveur de l'identité des octaves, on trouve encore trop fort le terme d'identité pris dans toute son assertion, M. R. dit qu'on peut lui en substituer tel autre qu'on voudra qui, en disant moins, en dise cependant assez.* »

et qu'il attend une réponse pour mieux continuer de « *faire connaître la vérité aux yeux* »… des mathématiciens !

> « *Cet auteur [Rameau] ajoute qu'il aurait encore bien des choses à dire sur la même matière, mais qu'il attend qu'on lui forme de nouveaux doutes, parce que les moyens qu'on y emploie sont pour lui de nouveaux nuages à dissiper, pour faire connaître la vérité aux yeux des autres comme il l'aperçoit lui-même. Aussi loin de craindre la critique, la souhaite-t-il avec ardeur, ne pouvant marquer trop de reconnaissance aux personnes qui veulent bien l'en croire digne.* »

Au total…

Au total, Rameau fait la sourde oreille aux avancées méthodologiques d'Euler et se cramponne au différend qui, d'un point de vue musicien, lui semble prépondérant : la différence qualitative entre intervalles élémentairement indistinguables (unisson-octave) [A] et intervalles discernables comme tels dans l'accord (quintes, etc.).

Rameau, pour des raisons d'économie générale internes à son intellectualité musicale, n'admet plus la mathématique qu'en position subordonnée à la Nature. Ce faisant, Rameau occulte la mathématisation de la physique, engagée depuis Galilée, accélérée par le Descartes même dont il se réclame, mathématisation qu'Euler étend pour sa part à la physiologie perceptive et à l'agrément musical.

A. Quoique modifiant, comme on l'a vu, la couleur harmonique

III. Les rapports mathématicien/musicien

Au total, les rapports Euler-Rameau combinent conjonction et disjonction.

Conjonction

Il y a d'abord que pour la première fois, une relation directe mathématicien-musicien met au jour une conjonction entre théories contemporaines (mathématique et musicale) de la musique.

– Euler et Rameau partagent l'idée d'une réévaluation contemporaine de l'antique polarité Pythagore/Aristoxène. Certes, ils ne conçoivent pas cette réévaluation de la même manière mais tous deux s'attaquent, par leur versant propre, à cette même question qui devient ainsi une question en partage.
– Somme toute, les deux théories partagent la conviction d'une autonomie conquise par la musique sur la mathématique, singulièrement sur l'arithmétique.
– Euler et Rameau partagent la conviction qu'une théorie (mathématique ou musicale) de la musique doit exhausser cette autonomie pour la consolider, non la réduire ou la dissoudre – ici encore, la différence des « solutions » mises en œuvre (formalisation mathématique pour Euler/méthode cartésienne et principe naturel pour Rameau) ne saurait effacer leur souci commun.
– Enfin – *last but not least…* – ces deux théories partagent un esprit qu'on dira de saine émulation : un espace commun de confrontation est bien ouvert.

Disjonction

Il n'est sans doute pas nécessaire d'insister sur la disjonction radicale qui sépare ces deux orientations théoriques exactement synchrones.

Ces théories divergent essentiellement (par-delà le différend localisé concernant la nature exacte des consonances) sur les points suivants :

– sur leurs prémisses : un seul principe (physico-acoustique) chez Rameau/l'état des savoirs musiciens reformulés en « *véritables* principes » chez Euler [A] ;

[A]. Les seuls titres des ouvrages d'Euler suffiraient à indiquer que l'articulation qu'il conçoit entre sa théorie et ses principes ne s'accorde guère à la conception théorique de

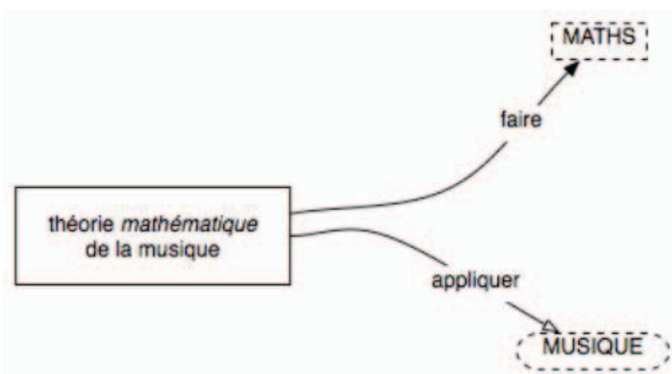
– sur leur dynamique logique interne : déduction non formalisée pour Rameau, formalisation mathématique pour Euler (ce qu'il appelle « *représentation* » des véritables principes…) ;
– sur leurs cibles : la musique pour Rameau, la mathématique pour Euler.

Le rapport entre ces deux théories est donc un alliage singulier de conjonctions et disjonctions.

10 – Une matrice…

Euler, finalement, nous délivre ici la matrice des théories mathématiques ultérieures de la musique.

Sa théorie de la musique, en effet, doit être vue comme ayant la mathématique pour cible véritable : il s'agit – on l'a suggéré – de se servir d'un unique domaine (la musique) pour mettre à l'épreuve l'unité mathématique des nouvelles disciplines mathématiques en plein essort. Il s'agit finalement aussi (et peut-être surtout) pour Euler de *faire* des mathématiques de son temps à partir de la musique, de mettre à l'épreuve de cette occasion musicale les nouvelles intuitions topologiques, analytiques, combinatoires, géométriques, etc. qui constituent son espace propre de travail mathématique.



Rameau pour qui, selon un cartésianisme réel ou inventé, tout doit clairement procéder d'un seul principe dont il n'y a pas lieu de douter. Rappelons ainsi les titres des deux ouvrages principaux d'Euler sur la musique : *Essai d'une nouvelle théorie de la musique exposée en toute clarté selon les* <u>*principes*</u> *de l'harmonie* (1731) ; *Des véritables* <u>*principes*</u> *de l'harmonie, représentés par le miroir musical* (1773)

D'où l'idée suivante : la théorie eulérienne de la musique sert ultimement la mathématique (plutôt que la musique), non seulement en servant de terrain d'épreuve à la nouvelle problématique de la formalisation mais, plus encore, en éprouvant combien cette nouvelle problématique est susceptible d'unifier la mathématique de son temps selon une même problématique.

Et tout ceci prend tournure car le jeune Euler apprend ainsi à *faire* de la mathématique à partir de la musique. Finalement pour lui, l'enjeu de théoriser mathématiquement la musique est peut-être surtout de faire de la mathématique plus librement, ou, du moins, d'avoir ainsi l'occasion d'en faire dans un espace moins saturé de théorèmes, problèmes et conjectures, bref d'éprouver plus immédiatement la joie de penser mathématiquement par soi-même.

À ce titre plus encore qu'aux précédents, ce geste d'Euler dessine un avenir *pour la mathématique* (*faire* de la bonne mathématique à partir de la musique, plus encore que la *théoriser*) et fait signe vers les musiciens en les interrogeant sur le point de savoir s'ils pourraient de leur côté, et pour leur propre compte, apprendre également à faire de la (bonne !) musique à partir de la mathématique…

Notes bibliographiques

Références

1. Journée *Leonhard Euler, mathématicien universel* (Ihés, Bures-sur-Yvettes ; 24 mai 2007) : www. iihes. ffr/jsp/site/Portal. jjsp ? page_id=226
2. *Euler et l'apparition du formalisme* ; in *Philosophie et calcul de l'infini* de Houzel, Ovaert, Raymond et Sansuc (François Maspéro, coll. *Algorithme* ; Paris, 1976)
3. Lettre du 13 septembre 1752
4. Lettre à Rameau (*op. cit.*)
5. Préface (p. iv) du *Tentamen novæ theoriæ musicæ ex certissimis harmoniæ principiis dilucide expositæ* (Essai d'une nouvelle théorie de la musique exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie), 1731/1739.Les extraits en français renvoient à la traduction des Œuvres complètes d'Euler publiées à Bruxelles en 1839.
6. *Tentamen. op. cit.* chap. II, p. 21
7. *Tentamen. op. cit.* Préface, p. ii
8. *Tentamen. op. cit.* p. 26

9. *Tentamen. op. cit.* p. 26
10. *Tentamen. op. cit.* chap. II, p. 22
11. *Tentamen. op. cit.* chap. II, p. 23
12. *Tentamen. op. cit.* Préface, p. vii
13. *op. cit.*
14. *op. cit.*
15. On se reportera sur ce point à l'exposé de Pierre Cartier au séminaire *mamuphi* (Ens, 25 février 2006) : *L'ouvrage d'Euler sur la théorie musicale (1739) : les principaux apports théorique*s

    www.diffusion.ens.fr/index. pphp ? res=conf&idconf=727
16. *Tentamen. op. cit.* Chap. II, p. 21
17. *Traité de l'harmonie universelle*, Livre premier
18. Voir sur ce point les travaux de Patrice Bailhache…
19. « *L'*"Essai d'une nouvelle théorie de la musique" *de Leonhard Euler* », publication de l'IREM de Caen
20. Voir ici les travaux de Franck Jedrzejewski.
21. *Tentamen. op. cit.* p. 62
22. *Tentamen. op. cit.* Préface, p. vii
23. *Tentamen. op. cit.*
24. *Tentamen*
25. « *Du véritable caractère de la musique moderne* » et « *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* »
26. « Conjecture… » (1764)
27. « *Des véritables principes de l'harmonie, représentés par le miroir musical* »
28. *Du véritable caractère de la musique moderne* (1764 ; §3, p. 175)
29. Cf. son *De harmoniæ veris principiis per speculum musicum repræsentatis* (Des véritables principes de l'harmonie, représentés par le miroir musical) de 1773
30. *De harmoniæ.* p. 269-270
31. *Tentamen. op. cit.* p. vv-vi
32. « Du véritable caractère de la musique moderne » (1764), p. 226
33. *Tentamen. op. cit.* p. 75 du texte latin original
34. *Extrait d'une réponse de M. Rameau à M. Euler, sur l'Identité des octaves. D'où résultent des vérités d'autant plus curieuses qu'elles n'ont pas encore été soupçonnées.* (Mercure de France, décembre 1752)